PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XIII - N. 11
pag. 113-128

SUI SISTEMI DIFFERENZIALI LINEARI ORDINARI E SUI LORO AGGIUNTI DI LAGRANGE (*)

NOTA SECONDA

ARMANDO CHIELLINI

SVMMARIVM. — Postquam nonnulla de linearium systematum transformationibus generatim Auctor disseruit, determinat invariantia differentialia systematis adiuncti Lagrangensis (quod nempe certo systemati adiunctum sit), et statuit quid opus sit, ut certum systema lineare cum suo adiuncto omnino congruat. Praeterea tractat de lineari systemate ad formam reductam alternam reducendo, ostendens maximam quae adest diversitatem inter secundae classis et cuiuslibet classis systemata.

§ 1. – TRASFORMAZIONI DEI SISTEMI LINEARI. FORME RIDOTTE.

1. – In un precedente lavoro (1) abbiamo stabilita la teoria invariantiva dei sistemi lineari, di classe due, cioè dei sistemi della forma

$$[a] \qquad \begin{cases} A_{11}(y_1) + A_{12}(y_2) = 0 \\ A_{21}(y_1) + A_{22}(y_2) = 0 \ ; \end{cases}$$

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Ugo Amaldi nella Riunione del 7 giugno 1949.

(1) CHIELLINI, *La teoria invariantiva dei sistemi differenziali lineari di due equazioni di ordine qualunque.* «Pontificia Academia Scientiarum», 1949, Vol. XII.

ma una semplice osservazione ci fa vedere che tale teoria è estendibile senz'altro ai sistemi di classe qualunque

$$
[\mathrm{I}] \qquad \begin{cases} A_{11}(y_1) + A_{12}(y_2) + \ldots + A_{1m}(y_m) = 0 \\ A_{21}(y_1) + A_{22}(y_2) + \ldots + A_{2m}(y_m) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{m1}(y_1) + A_{m2}(y_2) + \ldots + A_{mm}(y_m) = 0 \end{cases}
$$

Infatti gli invarianti differenziali del sistema [a] si distribuiscono in due gruppi, quello degli invarianti che abbiamo indicato con θ_k, relativi ai polinomi differenziali A_{11}, A_{22} e quello degli invarianti ϑ_k relativi ai polinomi differenziali A_{12}, A_{21}; gli invarianti θ_k coincidono con quelli delle equazioni differenziali ordinarie, mentre gli invarianti ϑ_k sono formati (nella stessa maniera) esclusivamente con i coefficienti di un solo polinomio differenziale A_{ih}. Ne segue allora che nel caso generale del sistema [I] avremo gli invarianti

$$
\theta_k^{(1)},\ \theta_k^{(2)}, \ldots, \theta_k^{(m)}
$$

relativi ai polinomi A_{ii} e gli invarianti

$$
\vartheta_k^{(1)},\ \vartheta_k^{(2)}, \ldots, \vartheta_k^{(r)} \qquad [r = m(n-1)]
$$

formati ciascuno, nella stessa maniera, con i coefficienti di uno solo dei polinomi $A_{ih}(i \neq k)$.

2. – Ciò premesso, scriviamo per disteso il sistema [I], mettendo in evidenza i coefficienti numerici, come si usa sempre fare nella teoria degli invarianti differenziali

$$
[\mathrm{I}_1] \qquad \begin{cases} y_1^{(n)} + \sum_1^n {}_k \binom{n}{k} a_{11k} y_1^{(n-k)} + \sum_1^n {}_k \binom{n}{k} a_{12k} y_2^{(n-k)} + \ldots + \sum_1^n {}_k \binom{n}{k} a_{1mk} y_m^{(n-k)} = 0 \\ y_2^{(n)} + \sum_1^n {}_k \binom{n}{k} a_{21k} y_1^{(n-k)} + \sum_1^n {}_k \binom{n}{k} a_{22k} y_2^{(n-k)} + \ldots + \sum_1^n {}_k \binom{n}{k} a_{2mk} y_m^{(n-k)} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m^{(n)} + \sum_1^n {}_k \binom{n}{k} a_{m1k} y_1^{(n-k)} + \sum_1^n {}_k \binom{n}{k} a_{m2k} y_2^{(n-k)} + \ldots + \sum_1^n {}_k \binom{n}{k} a_{mmk} y_m^{(n-k)} = 0 \end{cases}
$$

Secondo una denominazione ormai classica, si dice che il sistema ha la *forma ridotta* se

$$a_{111} = a_{221} = a_{331} = \ldots = a_{mm1} = 0$$

e si vede immediatamente che è sempre possibile, mediante sole operazioni di derivazione, ridurci a tale forma, mediante il cambiamento di funzioni incognite definito dalle relazioni

$$y_i = \lambda_i \mathrm{Y}_i \ ,$$

con le λ_i soddisfacenti alle condizioni

$$[2] \qquad n\lambda'_i + a_{ii1}\lambda_i = 0$$

Consideriamo ora il sistema aggiunto del sistema $[\mathrm{I}_1]$ ed indichiamone con α_{ikl} i suoi coefficienti; avremo evidentemente (vedi nota 1 pag. 113).

$$\alpha_{ii1} = - a_{ii1}$$

e quindi per ridurre alla forma ridotta il sistema aggiunto, dovremo eseguire il cambiamento di funzioni $\eta_i = \Lambda_i \mathrm{H}_i$ con le Λ_i definite dalle equazioni $n\Lambda'_i + \alpha_{ii1}\Lambda_i = 0$, cioè da

$$[2_1] \qquad n\Lambda'_i - a_{ii1}\Lambda_i = 0$$

Confrontando [2] e $[2_1]$ segue senz'altro

$$\Lambda_i = \frac{1}{\lambda_i}$$

ed allora, tenendo presenti i risultati fondamentali della teoria degli invarianti differenziali [1], possiamo senz'altro enunciare il

Teorema I: *Gli invarianti del sistema aggiunto sono anche invarianti del sistema dato e viceversa.*

---

[1] Vedi Wilczynski: *Differential geometry of curves and ruled surfaces* (cap. V) - Teubner. Lipsia.

Come *Corollario* immediato di ciò segue poi:

La riduzione alla forma ridotta si effettua simultaneamente per un sistema differenziale [I] *e per il suo aggiunto*

3. – Un'altra trasformazione assai importante sui sistemi lineari e che dà luogo ad un risultato notevole per le applicazioni è quella che conduce alla così detta *forma semicanonica*, cioè alla forma in cui sono nulli tutti i coefficienti delle derivate $(n-1)^{me}$; per poter ottenere tale forma, eseguiamo sul sistema $[I_1]$ il cambiamento di funzioni incognite definito da

$$y_i = \sum_1^m {}_k \lambda_{ik} Y_k \qquad (i = 1, 2, ..., m) \tag{3}$$

con il determinante

$$\Delta = \| \lambda_{ik}(x) \| \neq 0 \ ; \tag{4}$$

introducendo le [3] in $[I_1]$ ed ordinando, si vede che per ottener la forma semicanonica, occorre che siano soddisfatte le condizioni

$$\begin{cases} \lambda'_{1i} + a_{111}\lambda_{1i} + a_{121}\lambda_{2i} + ... + a_{1m1}\lambda_{mi} = 0 \\ \lambda'_{2i} + a_{211}\lambda_{1i} + a_{221}\lambda_{2i} + ... + a_{2m1}\lambda_{mi} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda'_{mi} + a_{m11}\lambda_{1i} + a_{m21}\lambda_{2i} + ... + a_{mm1}\lambda_{mi} = 0 \end{cases}$$

da cui risulta che per trasformare il sistema dato in un altro di forma semicanonica, dobbiamo prendere per le m funzioni λ di ogni colonna del determinante [4] cioè per le m m^plo^

$$(\lambda_{1i},\ \lambda_{2i}, ...,\ \lambda_{mi}) \qquad (i = 1, 2, ..., m)$$

m soluzioni costituenti un sistema fondamentale di soluzioni del sistema differenziale lineare del primo ordine e di classe m

$$\begin{cases} \theta'_1 + a_{111}\theta_1 + a_{121}\theta_2 + ... + a_{1m1}\theta_m = 0 \\ \theta'_2 + a_{211}\theta_1 + a_{221}\theta_2 + ... + a_{2m1}\theta_m = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \theta'_m + a_{m11}\theta_1 + a_{m21}\theta_2 + ... + a_{mm1}\theta_m = 0 \ . \end{cases} \tag{5}$$

Analogamente, volendo ridurre alla forma semicanonica il sistema aggiunto, mediante la sostituzione di funzioni incognite

$$\eta_i = \sum_1^m{}_k \Lambda_{ik} H_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

con $\| \Lambda_{ik}(x) \| \neq 0$, dovremo prendere per m m$^{\text{ple}}$

$$(\Lambda_{1i},\ \Lambda_{2i}, \ldots, \Lambda_{mi}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

m soluzioni costituenti un sistema fondamentale di soluzioni del sistema differenziale lineare del primo ordine e di classe m

$$[6] \qquad \begin{cases} \tau'_1 + \alpha_{111} \tau_1 + \alpha_{121} \tau_2 + \ldots + \alpha_{1m1} \tau_m = 0 \\ \tau'_2 + \alpha_{211} \tau_1 + \alpha_{221} \tau_2 + \ldots + \alpha_{2m1} \tau_m = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tau'_m + \alpha_{m11} \tau_1 + \alpha_{m21} \tau_2 + \ldots + \alpha_{mm1} \tau_m = 0\,, \end{cases}$$

dove α_{ikl} indicano i coefficienti del sistema aggiunto; ma

$$\alpha_{ik1} = -a_{ki1}$$

e quindi si deduce che il sistema [6] è aggiunto del sistema [5] sia secondo la nostra definizione generale di sistema aggiunto, sia secondo quella particolare che si usa dare per i soli sistemi lineari del primo ordine (¹); possiamo quindi enunciare il

Teorema II: *La riduzione di un sistema lineare di ordine e di classe qualunque alla forma semicanonica e quella analoga del suo sistema aggiunto dipendono dalla risoluzione di due sistemi lineari del primo ordine, aggiunti uno dell'altro.*

Ne segue come conseguenza immediata che *se il sistema dato è di forma semicanonica lo è anche il suo sistema aggiunto.*

(¹) Vedi per es. Lagrange: *Acta Mathematica*-tomo 48 (1926).

§ 2. – Gli invarianti fondamentali del sistema aggiunto

Per l'osservazione fatta al principio del paragrafo precedente, possiamo senz'altro limitarci al caso di un sistema di classe due, cioè al sistema

$$\begin{cases} A_{11}(y_1) + A_{12}(y_2) \equiv y_1^{(n)} + \sum_1^n {}_k \binom{n}{k} p_{1k}\, y_1^{(n-k)} + \sum_1^n {}_k \binom{n}{k} q_{1k}\, y_2^{(n-k)} = 0 \\ A_{21}(y_1) + A_{22}(y_2) \equiv y_2^{(n)} + \sum_1^n {}_k \binom{n}{k} p_{2k}\, y_1^{(n-k)} + \sum_1^n {}_k \binom{n}{k} q_{2k}\, y_2^{(n-k)} = 0 \end{cases}$$

Gli invarianti di questo sistema (¹) si distinguono, come si è già accennato, in quelli $\theta_k^{(1)}$, $\theta_k^{(2)}$ relativi ai polinomi differenziali A_{11}, A_{22} (che non sono altro che quelli di un'ordinaria equazione differenziale lineare dell'ordine n) e in quelli $\vartheta_k^{(1)}$, $\vartheta_k^{(2)}$ relativi ai polinomi differenziali A_{12}, A_{21}, le cui espressioni esplicite sono (per A_{12})

$$[7]\begin{cases} \vartheta_1^{(1)} = q_{11} \\ \vartheta_2^{(1)} = q_{12} - q'_{11} \\ \vartheta_4^{(1)} = q_{11}q_{13} - \dfrac{n+9}{4} q_{11}q'_{12} - \dfrac{n-3}{4} q_{11}q''_{11} + \dfrac{n-3}{4}(q'_{11})^2 + \dfrac{n+3}{2} q'_{11}q_{12} \\ \vartheta_6^{(1)} = q^2_{11}\left\{q_{14} - \dfrac{2(n+2)}{n+1}(q'_{13} - q''_{12})\right\} + \dfrac{2(n+2)}{n+1} q_{11}\left\{q'_{11}q_{13} - 2q'_{11}q'_{12} - q''_{11}q_{12}\right\} + \\ \qquad + \dfrac{4(n+2)}{n+1} q_{12}(q'_{12})^2 - \dfrac{2(n-1)}{n+1} q_{12}(q_{11}q_{13} - q^2_{12}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

e analogamente per i $\vartheta_k^{(2)}$ relativi a A_{21} (basta scambiare il primo indice 1 con 2 e la lettera q con la lettera p (²)).

(¹) Vedi Chiellini *loc. cit.*

(²) Veramente nel nostro citato lavoro si è stabilita la forma esplicita solamente per gli invarianti ϑ_1, ϑ_2, ϑ_4; quella di ϑ_6 si è determinata ora, perchè solo ora interessa. Il procedimento per ottenerla è naturalmente lo stesso di quello stabilito nel lavoro citato. Osserviamo qui esplicitamente che tutti gli invarianti ϑ_k, eccetto il primo ϑ_1, sono di peso pari ed inoltre che in ogni invariante espresso mediante i rapporti $\dfrac{q_{1k}}{q_{11}}$ $\left(\text{o } \dfrac{p_{2k}}{p_{21}}\right)$ tutti i termini, esclusi quelli della parte lineare, devono contenere il rapporto $\dfrac{q_{12}}{q_{11}}$ $\left(\text{o } \dfrac{p_{22}}{p_{21}}\right)$ come fattore.

Indicando per brevità con le lettere maiuscole i coefficienti del sistema aggiunto, cioè scrivendo tale sistema sotto la forma

$$\begin{cases} A_{11}^{(0)}(\eta_1) - A_{21}^{(0)}(\eta_2) \equiv \eta_1^{(n)} + \sum_1^n{}_k \binom{n}{k} P_{1k}\eta_1^{(n-k)} + \sum_1^n{}_k \binom{n}{k} Q_{1k}\eta_2^{(n-k)} = 0 \\ -A_{12}^{(0)}(\eta_1) + A_{22}^{(0)}(\eta_2) \equiv \eta_2^{(n)} + \sum_1^n{}_k \binom{n}{k} P_{2k}\eta_1^{(n-k)} + \sum_1^n{}_k \binom{n}{k} Q_{2k}\eta_2^{(n-k)} = 0 \end{cases}$$

si trova senz'altro

$$[8] \qquad \begin{cases} P_{12} = p_{12} \\ P_{13} = 3p_{12}' - p_{13} \\ P_{14} = 6p_{12}'' - 4p_{13}' + p_{14} \\ P_{15} = 10p_{12}''' - 10p_{13}'' + 5p_{14}' - p_{15} \\ P_{16} = \binom{6}{2}p_{12}^{\mathrm{IV}} - \binom{0}{3}p_{13}''' + \binom{6}{2}p_{14}'' - \binom{6}{1}p_{15}' + p_{16} \end{cases}$$

$$[8_1] \qquad \begin{cases} Q_{11} = -p_{21} \\ Q_{12} = -2p_{21}' + p_{22} \\ Q_{13} = -3p_{21}'' + 3p_{22}' - p_{23} \\ Q_{14} = -4p_{21}''' + 6p_{22}'' - 4p_{23}' + p_{24} \\ Q_{15} = -5p_{21}^{\mathrm{IV}} + 10p_{22}''' - 10p_{23}'' + 5p_{24}' - p_{25} \\ Q_{16} = -\binom{6}{1}p_{21}^{\mathrm{V}} + \binom{6}{2}p_{22}^{\mathrm{IV}} - \binom{6}{3}p_{23}''' + \binom{6}{2}p_{24}'' - \binom{6}{1}p_{25}' + p_{26} \end{cases}$$

ed espressioni analoghe per P_{2k} e Q_{2k}.

5. – Ciò premesso, andiamo a calcolarci gli invarianti differenziali del sistema aggiunto, che indicheremo con

$$\theta_k^{(1,0)} \quad , \qquad \theta_k^{(2,0)}$$

se si tratta di quelli relativi ai coefficienti P_{1k} e Q_{2k} e con

$$\vartheta_k^{(1,0)} \quad , \qquad \vartheta_k^{(2,0)}$$

se si tratta di quelli relativi ai coefficienti Q_{1k} e P_{2k}. Per ciò che si è precedentemente osservato, gli invarianti $\theta_k^{(i,0)}$ non sono altro che quelli relativi ad una equazione aggiunta e quindi in base al classico Teorema di BRIOSCHI-BURGATTI possiamo senz'altro concludere che gli invarianti $\theta_k^{(i,0)}$, di peso pari, coincidono con i corrispondenti invarianti $\theta_k^{(i)}$ e che quelli di peso dispari sono eguali ed opposti ai corrispondenti invarianti $\theta_k^{(i)}$, cioè che

$$\theta_{2k}^{(i,0)} = \theta_{2k}^{(i)} \; ; \quad \theta_{2k+1}^{(i,0)} = -\,\theta_{2k+1}^{(i)} \qquad (i = 1, 2)$$

6. – Restano ora da calcolare gli invarianti $\vartheta_k^{(i,0)}$ relativi ai polinomi differenziali $-\mathrm{A}_{21}^{(0)}$, $-\mathrm{A}_{12}^{(0)}$; a questo scopo dovremo introdurre le [8] e [8$_1$] nelle [7] (che naturalmente immagineremo scritte con le lettere maiuscole) ed avremo senz'altro

$$\left\{\begin{array}{lll}
[9] & \vartheta_1^{(1,0)} = -\,\vartheta_1^{(2)} \quad ; & \vartheta_1^{(2,0)} = -\,\vartheta_1^{(1)} \\
[10] & \vartheta_2^{(1,0)} = -\,\vartheta_2^{(2)} \quad ; & \vartheta_2^{(2,0)} = -\,\vartheta_2^{(1)} \\
[11] & \multicolumn{2}{l}{\vartheta_4^{(1,0)} = \vartheta_4^{(2)} + \frac{n+3}{4}\vartheta_1^{(2)}\{\vartheta_2^{(2)}\}' - (n+3)\,\vartheta_2^{(2)}\{\vartheta_1^{(2)}\}';} \\
 & \multicolumn{2}{r}{\vartheta_4^{(2,0)} = \vartheta_4^{(1)} + \frac{n+3}{4}\vartheta_1^{(1)}\{\vartheta_1^{(1)}\}' - (n+3)\,\vartheta_2^{(1)}\{\vartheta_1^{(1)}\}'}
\end{array}\right.$$

Il calcolo dopo ciò diventa rapidamente faticoso; per calcolarci $\vartheta_6^{(1,0)}$ converrà da prima ricavarci i varii coefficienti p, q per mezzo degli invarianti $\vartheta^{(i')}$ ottenendo le espressioni

$$\left\{\begin{array}{l}
q_{11} = \vartheta_1^{(1)},\; q_{12} = \vartheta_2^{(1)} + \{\vartheta_1^{(1)}\}',\; q_{11}q_{13} = \vartheta_4^{(1)} + \frac{(n+9)}{4}\vartheta_1^{(1)}\{\vartheta_2^{(1)}\}' - \frac{(n+3)}{2}\vartheta_2^{(1)}\{\vartheta_1^{(1)}\}' + \\
\qquad\qquad + \frac{(n+3)}{2}\vartheta_1^{(1)}\{\vartheta_1^{(1)}\}'' - \frac{3(n+1)}{4}\left[\{\vartheta_1^{(1)}\}'\right]^2 \\
p_{21} = \vartheta_1^{(2)},\; p_{22} = \vartheta_2^{(2)} + \{\vartheta_1^{(2)}\}',\; p_{21}p_{23} = \vartheta_4^{(2)} + \frac{n+9}{4}\vartheta_1^{(2)}\{\vartheta_2^{(2)}\}' - \frac{n+3}{2}\vartheta_2^{(2)}\{\vartheta_2^{(2)}\}' + \\
\qquad\qquad + \frac{n+3}{2}\vartheta_1^{(2)}\{\vartheta_1^{(2)}\}'' - \frac{3(n+1)}{4}\left[\{\vartheta_1^{(2)}\}'\right]^2
\end{array}\right.$$

dopo di che, con un procedimento assai laborioso si ottiene

$$
[12] \qquad \vartheta_6^{(1,0)} = \vartheta_6^{(2)} - \frac{16}{n+1} \}\vartheta_1^{(1)}\{' \vartheta_4^{(2)} + \frac{4}{n+1} \vartheta_1^{(2)} \}\vartheta_4^{(2)}\{' + \frac{n+3}{n+1} \vartheta_1^{(2)} \}\vartheta_2^{(2)}\{'' +
$$
$$
+ \frac{2(n+3)}{n+1} \left[\vartheta_1^{(2)}\right]^2 \}\vartheta_1^{(2)}\{''' - \frac{12(n-1)}{n+1} \left[\vartheta_2^{(2)}\right]^2 \}\vartheta_1^{(2)}\{' + \frac{8(n+3)}{n+1} \vartheta_2^{(2)} \left[\}\vartheta_1^{(2)}\{'\right]^2 +
$$
$$
+ \frac{4(n-3)}{n+1} \vartheta_1^{(2)} \vartheta_2^{(2)} \}\vartheta_2^{(2)}\{' - \frac{7(n+3)}{n+1} \vartheta_1^{(2)} \}\vartheta_1^{(2)}\{' \}\vartheta_2^{(2)}\{' - \frac{2(n+3)}{n+1} \vartheta_1^{(2)} \vartheta_2^{(2)} \}\vartheta_1^{(2)}\{''
$$

e analogamente per $\vartheta_6^{(2,0)}$.

Le espressioni così trovate sono sufficienti per il nostro scopo.

Osserviamo subito esplicitamente che le espressioni ottenute per i $\vartheta^{(i,0)}$ confermano pienamente il teorema I° e cioè che gli invarianti del sistema dato lo sono anche del sistema aggiunto e viceversa.

§ 3. – I sistemi autoaggiunti. Loro caratterizzazione invariantiva.

7. – *Definizione: Chiamasi autoaggiunto un sistema differenziale lineare che coincide con il proprio aggiunto.*

In base a questa definizione, perchè un sistema risulti autoaggiunto, occorre evidentemente che si abbia

$$
\begin{array}{ll}
[13] & \left\{ \begin{array}{ll} A_{11}(y_1) \equiv A_{11}^{(0)}(\eta_1) \,, & A_{22}(y_2) \equiv A_{22}^{(0)}(\eta_2) \\
[14] \quad A_{12}(y_2) \equiv - A_{21}^{(0)}(\eta_2) \,, & A_{21}(y_1) \equiv - A_{12}^{(0)}(\eta_1) \end{array} \right.
\end{array}
$$

In base al citato teorema di Burgatti-Brioschi, affinchè siano soddisfatte la [13], occorre e basta che gli invarianti $\theta^{(i)}$ di peso dispari si annullino, cioè che si abbia $\theta_{2k+1}^{(i)} = 0$, mentre perchè siano soddisfatte le [14] dovrà aversi

$$
[15] \qquad \vartheta_k^{(1,0)} = \vartheta_k^{(1)} \quad , \qquad \vartheta_k^{(2,0)} = \vartheta_k^{(2)}
$$

Introducendo le [15] nelle [9] e [10] abbiamo senz'altro

$$
[16] \qquad - \vartheta_1^{(2)} = \vartheta_1^{(1)} \quad , \qquad \vartheta_2^{(1)} = \vartheta_2^{(2)}
$$

cioè le due coppie di condizioni $\vartheta_1^{(i,0)} = \vartheta_1^{(i)}$, $\vartheta_2^{(i,0)} = \vartheta_2^{(i)}$ (per $i = 1, 2$) danno luogo alle due sole condizioni [16].

Passiamo ora alle espressioni [11]; si deducono da esse le due relazioni

$$[17]\qquad \begin{cases} \vartheta_4^{(1)} = \vartheta_4^{(2)} + \dfrac{(n+3)}{2}\,\vartheta_1^{(2)}\}\vartheta_2^{(2)}\{' - (n+3)\,\vartheta_2^{(2)}\}\vartheta_1^{(2)}\{' \\ \vartheta_4^{(2)} = \vartheta_4^{(1)} + \dfrac{(n+3)}{2}\,\vartheta_1^{(1)}\}\vartheta_2^{(1)}\{' - (n+3)\,\vartheta_2^{(1)}\}\vartheta_1^{(1)}\{' \end{cases}$$

da cui, eliminando per esempio $\vartheta_4^{(1)}$ e semplificando, risulta:

$$\vartheta_1^{(2)}\}\vartheta_2^{(2)}\{' + \vartheta_1^{(1)}\}\vartheta_2^{(1)}\{' = 2\left[\vartheta_2^{(2)}\}\vartheta_1^{(2)}\{' + \vartheta_2^{(1)}\}\vartheta_1^{(1)}\{'\right]$$

che è evidentemente un'identità a causa delle [16]; se ne deduce che anche la coppia di condizione [17] ci porta all'unica condizione espressa da uno qualunque delle [17] stesse. Passiamo ora alle altre due condizioni $\vartheta_6^{(i,0)} = \vartheta_6^{(i)}$; scrivendo per un momento, per semplicità, le espressioni di $\vartheta_6^{(i,0}$ sotto la forma

$$\begin{cases} \vartheta_6^{(1,0)} = \vartheta_6^{(1)} = \vartheta_6^{(2)} + \dfrac{4}{n+1}\,\vartheta_1^{(2)}\}\vartheta_4^{(2)}\{' - \dfrac{16}{n+1}\,\vartheta_4^{(2)}\}\vartheta_1^{(2)}\{' + A_2 \\ \vartheta_6^{(2,0)} = \vartheta_6^{(2)} = \vartheta_6^{(1)} + \dfrac{4}{n+1}\,\vartheta_1^{(1)}\}\vartheta_4^{(1)}\{' - \dfrac{16}{n+1}\,\vartheta_4^{(1)}\}\vartheta_1^{(1)}\{' + A_1 \end{cases}$$

ed eliminando i ϑ_6 risulta identicamente

$$\frac{4}{n+1}\left[\vartheta_1^{(2)}\}\vartheta_4^{(2)}\{' + \vartheta_1^{(1)}\}\vartheta_4^{(1)}\{'\right] - \frac{16}{n+1}\left[\vartheta_4^{(2)}\}\vartheta_1^{(2)}\{' + \vartheta_4^{(1)}\}\vartheta_1^{(1)}\{'\right] + A_2 + A_1 = 0$$

ed introducendo in questa le [16] e [17], se ne deduce la condizione

$$[18]\qquad \vartheta_2^{(2)} = \vartheta_2^{(1)} = 0\ ,$$

dopo di che si ha senz'altro

$$\vartheta_4^{(1)} = \vartheta_4^{(2)}\ , \qquad \vartheta_6^{(1)} = \vartheta_6^{(2)}\ .$$

Ma dalla [18] risulta poi immediatamente che anche tutti gli invarianti successsivi $\vartheta_k^{(i)}$ (che sono sempre di peso pari) devono essere eguali; infatti se andiamo a calcolare un qualunque altro invariante $\vartheta_k^{(i,0)}$ (con $k \geqslant 8$), questo risulta espresso per mezzo di $\vartheta_k^{(i)}$, $\vartheta_{k-2}^{(i)}\}\vartheta_1^{(i)}\{'$, $\}\vartheta_{k-2}^{(i)}\{'\vartheta_1^{(i)}$

e di invarianti di peso $k-4$ o inferiore (e delle loro derivate) moltiplicati per $\vartheta_2^{(i)}$ (o per le loro derivate) o per $\vartheta_1^{(i)}$ (o per le loro derivate) ed infine i termini che posseggono il fattere $\vartheta_1^{(i)}$, lo contengono un numero dispari di volte. Allora, per il risultato precedente, segue senz'altro $\vartheta_k^{(i,0)} = \vartheta_k^{(i)}$.

Se ne conclude che, oltre alle condizioni espresse dal teorema di Burgatti-Brioschi, affinchè un sistema sia autoaggiuuto, devono essere soddisfatte le altre

$$\vartheta_1^{(1)} = -\vartheta_1^{(2)} \quad ; \qquad \vartheta_2^{(1)} = \vartheta_2^{(2)} = 0 \ .$$

8. - Possiamo quindi enunciare il fondamentale Teorema III:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema differenziale lineare, di forma ridotta

$$\begin{cases} A_{11}(y_1) + A_{12}(y_2) + \dots + A_{1m}(y_m) = 0 \\ A_{21}(y_1) + A_{22}(y_2) + \dots + A_{2m}(y_m) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{m1}(y_1) + A_{m2}(y_2) + \dots + A_{mm}(y_m) = 0 \end{cases}$$

sia autoaggiunto è che gli invarianti differenziali $\theta_k^{(i)}$ (cioè quelli relativi ai polinomi differenziali A_{ii}) di peso dispari siano nulli, che gli invarianti differenziali di peso uno, relativi alle coppie di polinomi differenziali A_{ik}, A_{ki} siano opposti e che quelli di peso due siano nulli.

Se ne deduce da ciò il notevole Corollario: Considerata una coppia di polinomi differenziali A_{ik}, A_{ki} $(i \neq k)$ di un sistema autoaggiunto, i coefficienti di uno di essi sono pienamente determinati da quelli dell'altro, mentre i coefficienti di questo *risultano del tutto arbitrarii, eccetto quello della derivata $(n-2)^{ma}$ che deve essere la derivata del coefficiente della derivata $(n-1)^{ma}$.*

Per esempio sia il sistema di terza classe

$$[19] \quad y_i^{(n)} + \sum_1^n {}_k \binom{n}{k} \left\{ p_{ik} y_1^{(n-k)} + q_{ik} y_2^{(n-k)} + r_{ik} y_3^{(n-k)} \right\} = 0 ; \quad (p_{11} = q_{21} = r_{31} = 0)$$
$$[i = 1, 2, 3]$$

affinchè sia autoaggiunto deve aversi

$$q_{12} = q'_{11} \qquad r_{12} = r'_{11} \qquad q_{32} = q'_{31}$$

ed inoltre

$$\begin{cases} p_{21}=-q_{11} \\ p_{22}=-q'_{11} \\ p_{23}=-q_{13} \\ p_{24}=q_{14}-4q'_{13}+2q'''_{11} \\ p_{25}=-q_{15}+5q'_{14}-10q''_{13}+5q^{IV}_{11} \end{cases} \quad \begin{cases} p_{31}=-r_{11} \\ p_{32}=-r'_{11} \\ p_{33}=-r_{13} \\ p_{34}=r_{14}-4r'_{13}+2r'''_{11} \\ p_{35}=-r_{15}+5r'_{14}-10r''_{13}+5r^{IV}_{11} \end{cases} \quad \begin{cases} r_{21}=-q_{31} \\ r_{22}=-q'_{31} \\ r_{23}=-q_{33} \\ r_{24}=q_{34}-4q'_{33}+2q''_{31} \\ r_{25}=-q_{35}+5q'_{34}-10q''_{33}+5q^{IV}_{31} \end{cases}$$

. . . .

mentre i oefficienti p_{1i}, q_{2i}, r_{3i} devono esser legati dalle note relazioni dei coefficienti di un'equazione autoaggiunta.

§ 4. – La forma ridotta alterna dei sistemi lineari.

9. – *Definizione: Un sistema lineare si dirà di* forma alterna *se i suoi invarianti* $\vartheta_2^{(i)}$ *sono nulli*, cioè se in ogni equazione del sistema i coefficienti delle derivate $(n-2)^{me}$ delle funzioni, che non compaiono nelle derivate n^{me}, sono le derivate prime dei coefficienti delle derivate $(n-1)^{me}$.

Dalla considerazione dei sistemi autoaggiunti, svolta nel paragrafo precedente, risulta tutta l'importanza di questa forma alterna, perchè *i sistemi autoaggiunti*, in base al teorema III, *sono necessariamente di forma alterna.*

A questo proposito è essenziale osservare quanto segue:

Mentre per i sistemi di classe maggiore o uguale a tre, l'essere $\vartheta_2^{(i)}=0$ rappresenta una *effettiva condizione* a cui devono soddisfare i coefficienti, non altrettanto avviene per quelli di seconda classe (cioè per quelli in due funzioni incognite) in quanto che, *mediante sole operazioni algebriche e di quadratura è sempre possibile ridurre un sistema lineare di classe due alla forma ridotta alterna.*

Eseguiamo il calcolo, per semplicità di scrittura, per il caso di $m=3$, cioè partiamo dal sistema [19] però non di forma ridotta) ed eseguiamo su di esso la sostituzione di funzioni incognite

[20] $$y_i = \sum_1^3{}_k \delta_{ik} Y_k \qquad (i=1,2,3)$$

con il determinante $\Delta \equiv \|\delta_{ik}(x)\|$ non identicamente nullo.

Introducendo le [20] nel sistema dato si ha il sistema trasformato

$$[21] \quad \delta_{i1} Y_1^{(n)} + \delta_{i2} Y_2^{(n)} + \delta_{i3} Y_3^{(n)} + \sum_1^3{}_k \binom{n}{k} \left\{ P_{ik} Y_1^{(n-k)} + Q_{ik} Y_2^{(n-k)} + R_{ik} Y_2^{(n-k)} \right\} = 0$$

dove i coefficienti P_{ik}, Q_{ik}, R_{ik} sono dati dalle espressioni

$$[22] \begin{cases} P_{i1} = \delta'_{i1} + p_{i1}\delta_{11} + q_{i1}\delta_{21} + r_{i1}\delta_{31} \\ Q_{i1} = \delta'_{i2} + p_{i1}\delta_{12} + q_{i1}\delta_{22} + r_{i1}\delta_{32} \qquad (i = 1, 2, 3) \\ R_{i1} = \delta'_{i3} + p_{i1}\delta_{13} + q_{i1}\delta_{23} + r_{i1}\delta_{33} \end{cases}$$

$$[23] \begin{cases} P_{i2} = \delta''_{i1} + 2(p_{i1}\delta'_{11} + q_{i1}\delta'_{21} + r_{i1}\delta'_{31}) + p_{i2}\delta_{11} + q_{i2}\delta_{21} + r_{i2}\delta_{31} \\ Q_{i2} = \delta''_{i2} + 2(p_{i1}\delta'_{12} + q_{i1}\delta'_{22} + r_{i1}\delta'_{32}) + p_{i2}\delta_{12} + q_{i2}\delta_{22} + r_{i2}\delta_{32} \quad (i=1,2,3) \\ R_{i2} = \delta''_{i3} + 2(p_{i1}\delta'_{13} + q_{i1}\delta'_{23} + r_{i1}\delta'_{33}) + p_{i2}\delta_{13} + q_{i2}\delta_{23} + r_{i2}\delta_{33} \end{cases}$$

Il sistema [21] è senz'altro riducibile alla forma normale (cioè risolto rispetto alle derivate n^{me}) per l'ipotesi di $\Delta \neq 0$ ed effettuando la riduzione, con la regola di Cramer, avremo senz'altro

$$[24] \quad \begin{aligned} &\Delta Y_1^{(n)} + \binom{n}{1} \left\{ \left(\sum_1^3{}_i P_{i1} \Delta_{i1} \right) Y_1^{(n-1)} + \left(\sum_1^3{}_i Q_{i1} \Delta_{i1} \right) Y_2^{(n-1)} + \left(\sum_1^3{}_i R_{i1} \Delta_{i1} \right) Y_3^{(n-1)} \right\} + \\ &+ \binom{n}{2} \left\{ \left(\sum_1^3{}_i P_{i2} \Delta_{i1} \right) Y_1^{(n-2)} + \left(\sum_1^3{}_i Q_{i2} \Delta_{i1} \right) Y_2^{(n-3)} + \left(\sum_{1\,i}^3 R_{i2} \Delta_{i1} \right) Y_3^{(n-2)} \right\} + \ldots = 0 \end{aligned}$$

ed analogamente per le altre due equazioni, se indichiamo con Δ_{ik} i complementi algebrici degli elementi δ_{ik} del determinante Δ.

Cominciando ora ad imporre la condizione che il sistema trasformato sia di forma ridotta, segue

$$\sum_1^3{}_i P_{i1} \Delta_{i1} = 0 \ , \qquad \sum_1^3{}_i Q_{i1} \Delta_{i2} = 0 \ , \qquad \sum_1^3{}_i R_{i1} \Delta_{i3} = 0$$

ed introducendo ivi le [21] risulta

$$[25] \quad \begin{cases} \sum_1^3{}_i \Delta_{i1} \delta'_{i1} + \left(\sum_1^3{}_i \Delta_{i1} p_{i1} \right) \delta_{11} + \left(\sum_1^3{}_i \Delta_{i1} q_{i1} \right) \delta_{21} + \left(\sum_1^3{}_i \Delta_{i1} r_{i1} \right) \delta_{31} = 0 \\ \sum_1^3{}_i \Delta_{i2} \delta'_{i2} + \left(\sum_1^3{}_i \Delta_{i2} p_{i1} \right) \delta_{12} + \left(\sum_1^3{}_i \Delta_{i2} q_{i1} \right) \delta_{22} + \left(\sum_1^3{}_i \Delta_{i2} r_{i1} \right) \delta_{32} = 0 \\ \sum_1^3{}_i \Delta_{i3} \delta'_{i3} + \left(\sum_1^3{}_i \Delta_{i3} p_{i1} \right) \delta_{13} + \left(\sum_1^3{}_i \Delta_{i3} q_{i1} \right) \delta_{23} + \left(\sum_1^3{}_i \Delta_{i3} r_{i1} \right) \delta_{33} = 0 \end{cases}$$

da cui, sommando membro a membro, si ricava una curiosa relazione per il determinante Δ della sostituzione, che ricorda quella di Liouville; infatti osservando che

$$\frac{d\Delta}{dx} = \sum_1^3{}_i \Delta_{i1} \delta'_{i1} + \sum_1^3{}_i \Delta_{i2} \delta'_{i2} + \sum_1^3{}_i \Delta_{i3} \delta'_{i3} \ ,$$

segue senz'altro

$$\frac{d\Delta}{dx} + (p_{11} + q_{21} + r_{31})\Delta = 0 \tag{26}$$

o anche, per essere $\Delta \neq 0$:

$$\Delta = \Delta_0 e^{-\int (p_{11} + q_{21} + r_{31})\,dx}$$

Andando ora ad imporre, per il sistema trasformato [24], le condizioni di alternanza, si trovano le condizioni

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\Delta}\sum_1^3{}_k \Delta_{k1} Q_{k2} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\Delta}\sum_1^3{}_k \Delta_{k1} Q_{k1}\right\} ; \quad \frac{1}{\Delta}\sum_1^3{}_k \Delta_{k3} Q_{k2} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\Delta}\sum_1^3{}_k \Delta_{k3} Q_{k1}\right\} \\ &\frac{1}{\Delta}\sum_1^3{}_k \Delta_{k1} R_{k2} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\Delta}\sum_1^3{}_k \Delta_{k1} R_{k1}\right\} ; \quad \frac{1}{\Delta}\sum_1^3{}_k \Delta_{k3} R_{k2} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\Delta}\sum_1^3{}_k \Delta_{k2} R_{k1}\right\} \\ &\frac{1}{\Delta}\sum_1^3{}_k \Delta_{k2} P_{k2} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\Delta}\sum_1^3{}_k \Delta_{k2} P_{k1}\right\} ; \quad \frac{1}{\Delta}\sum_1^3{}_k \Delta_{k3} P_{k2} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\Delta}\sum_1^3{}_k \Delta_{k3} P_{k1}\right\} \end{aligned}\right.$$

Introducendo in queste le [22] e [23] e tenendo conto della [26], dopo calcoli assai lunghi, ma del tutto elementari, si deduce che

$$(\delta_{i1},\ \delta_{i2},\ \delta_{i2})$$

devono essere tre soluzioni linearmente indipendenti di certi sistemi di equazioni differenziali del primo ordine (in generale non lineari) e ciò conferma la prima parte della nostra asserzione.

10. – Supponiamo ora invece di considerare un sistema di seconda classe

$$y_i^{(n)} + \sum_1^n{}_k \binom{n}{k} \left\{ p_{ik} y_1^{(n-k)} + q_{ik} y_2^{(n-k)} \right\} = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

e di eseguire su di esso la sostituzione

$$y_i = \delta_{i1} Y_{i1} + \delta_{i2} Y_{i2} \ ; \qquad (\Delta = \|\delta_{ik}\| \neq 0 \ ; \quad i = 1, 2)$$

otterremo il sistema trasformato, analogo al sistema [24], i cui coefficienti, osservando che in questo caso si ha

$$\Delta_{11} = \delta_{22}, \ \Delta_{22} = \delta_{11}, \ \Delta_{12} = \delta_{21}, \ \Delta_{21} = \delta_{12},$$

divengono

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{ll} P_{11} = & \delta_{22}(\delta'_{11} + p_{11}\delta_{11} + q_{11}\delta_{21}) - \delta_{12}(\delta'_{21} + p_{21}\delta_{11} + q_{21}\delta_{21}) \\ Q_{11} = & \delta_{22}(\delta'_{12} + p_{11}\delta_{12} + q_{11}\delta_{22}) - \delta_{12}(\delta'_{22} + p_{21}\delta_{12} + q_{21}\delta_{22}) \\ P_{21} = & -\delta_{21}(\delta'_{11} + p_{11}\delta_{11} + q_{11}\delta_{21}) + \delta_{11}(\delta'_{21} + p_{21}\delta_{11} + q_{21}\delta_{21}) \\ Q_{21} = & -\delta_{21}(\delta'_{12} + p_{11}\delta_{12} + q_{11}\delta_{22}) + \delta_{11}(\delta'_{22} + p_{21}\delta_{12} + q_{21}\delta_{22}) \end{array}\right. \\ \\ \left\{\begin{array}{ll} P_{12} = & \delta_{22}\{\delta''_{11} + 2(p_{11}\delta'_{11} + q_{11}\delta'_{21}) + (p_{12}\delta_{11} + q_{12}\delta_{21})\} - \\ & \qquad - \delta_{12}\{\delta''_{21} + 2(p_{21}\delta'_{11} + q_{21}\delta'_{21}) + (p_{22}\delta_{11} + q_{22}\delta_{21})\}, \\ Q_{12} = & \delta_{22}\{\delta''_{12} + 2(p_{11}\delta'_{12} + q_{11}\delta'_{22}) + (p_{12}\delta_{12} + q_{12}\delta_{22})\} - \\ & \qquad - \delta_{12}\{\delta''_{22} + 2(p_{21}\delta'_{12} + q_{21}\delta'_{22}) + (p_{22}\delta_{12} + q_{22}\delta_{22})\}, \\ P_{22} = & -\delta_{21}\{\delta''_{11} + 2(p_{11}\delta'_{11} + q_{11}\delta'_{21}) + (p_{12}\delta_{11} + q_{12}\delta_{21})\} + \\ & \qquad + \delta_{11}\{\delta''_{21} + 2(p_{21}\delta'_{11} + q_{21}\delta'_{21}) + (p_{22}\delta_{11} + q_{22}\delta_{21})\}, \\ Q_{22} = & -\delta_{21}\{\delta''_{12} + 2(p_{11}\delta'_{12} + q_{11}\delta'_{22}) + (p_{12}\delta_{12} + q_{12}\delta_{22})\} + \\ & \qquad + \delta_{11}\{\delta''_{22} + 2(p_{21}\delta'_{12} + q_{21}\delta'_{22}) + (p_{22}\delta_{12} + q_{22}\delta_{22})\}. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Imponendo che il sistema sia di forma ridotta, cioè che sia $P_{11} = Q_{21} = 0$, segue

$$\left\{\begin{array}{l} (\delta_{22}\delta'_{11} - \delta_{12}\delta'_{21}) + (p_{11}\delta_{22} - p_{21}\delta_{12})\delta_{11} + (q_{11}\delta_{22} - q_{21}\delta_{12})\delta_{21} = 0 \\ (\delta_{11}\delta'_{22} - \delta_{21}\delta'_{12}) - (p_{11}\delta_{21} - p_{21}\delta_{11})\delta_{12} - (q_{11}\delta_{21} - q_{21}\delta_{11})\delta_{22} = 0 \end{array}\right.$$

da cui, in analogia alla [26]

$$[28] \qquad \frac{d\Delta}{dx} + (p_{11} + q_{21})\Delta = 0 \ .$$

Le condizioni di alternanza, per la [28] divengono

$$\frac{Q_{12}}{\Delta} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{Q_{11}}{\Delta}\right\}, \quad \frac{P_{22}}{\Delta} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{P_{21}}{\Delta}\right\};$$

considerando la prima di queste due e introducendo in essa le espressioni sopra trovate per Q_{11}, Q_{12}, otteniamo facilmente l'equazione algebrica di secondo grado in δ_{12}, δ_{22}:

$$\begin{aligned}&\{q_{12}-q'_{11}-q_{11}(p_{11}+q_{21})\}\delta^2_{22}+\\&\quad+\{p_{12}-q_{22}-p'_{11}+q'_{21}+q^2_{21}+p^2_{11}\}\delta_{12}\delta_{22}-\{p_{22}-p'_{21}+p_{21}(p_{11}+q_{21})\}\delta^2_{12}=0\end{aligned}$$

e *questa stessa equazione algebrica* si ottiene per δ_{11} e δ_{21}, tenendo conto della seconda delle condizioni [29] di alternanza.

Se ne deduce che i rapporti $\frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}$, $\frac{\delta_{22}}{\delta_{12}}$ risultano radici dell'equazione di secondo grado.

$$\begin{aligned}[30]\quad&\{q_{12}-q'_{11}-q_{11}(p_{11}+q_{21})\}k^2+\\&\quad+\{p_{12}-q_{22}-p'_{11}+q'_{21}+q^2_{21}-p^2_{11}\}k-\{p_{22}-p'_{21}+p_{21}(p_{11}+q_{21})\}=0\ (^1)\end{aligned}$$

Se allora indichiamo con k_1, k_2 tali radici, avremo

$$\delta_{21}=k_1\delta_{11}\ ,\qquad \delta_{22}=k_2\delta_{12}\ ,$$

dopo di che le [27] divengono

$$\begin{cases}(k_2-k_1)\delta'_{11}+(k_1k_2q_{11}+p_{11}k_2-q_{21}k_1-p_{21}-k'_1)\delta_{11}=0\\(k_2-k_1)\delta'_{12}+(k_1k_2q_{11}-p_{11}k_1-q_{21}k_2-p_{21}-k'_2)\delta_{12}=0\end{cases}$$

che si integrano con quadrature.

E con ciò il nostro asserto resta completamente verificato e cioè resta dimostrata la profonda differenza che intercede tra i sistemi di seconda classe e quelli di classe maggiore.

---

(1) Osserviamo esplicitamente che se partiamo da un sistema avente già la forma ridotta e cioè se $p_{11}=q_{21}=0$, la [30] assume la forma invariantiva, particolarmente semplice

$$\vartheta_2^{(1)}k^2+\tau_2k-\vartheta_2^{(2)}=0$$

dove τ_2 è l'invariante $p_{12}-q_{22}$.