PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XIII - N. 2
pag. 9-28

SUI SISTEMI DIFFERENZIALI LINEARI ORDINARI E SUI LORO AGGIUNTI DI LAGRANGE (*)

NOTA PRIMA

ARMANDO CHIELLINI

SVMMARIVM. — Hac in Nota systhema adiunctum cuiusdam systhematis linearis ordinarii definitur ab Auctore qui adhibet cognitam illam proprietatem Jacosianam circa adiunctum Lagrangianum cuiusdam aequationis differentialis linearis; insuper addit Auctor nonnullas proprietates fundamentales huius systematis.

§ 1. – ALCUNE CONSIDERAZIONI FONDAMENTALI SULLE EQUAZIONI AGGIUNTE.

1. – Presa un'equazione differenziale lineare dell'ordine n

$$[1] \qquad E(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \,,$$

è ben nota l'importanza che in molte questioni di Analisi e di Geometria presenta la sua *aggiunta di Lagrange*

$$[1_1] \quad E_n(y) \equiv y^{(n)} - \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(a_1 y) + \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(a_2 y) + \dots + (-1)^n (a_n y) = 0$$

Il CELS, in una sua notevole memoria (1), partendo dalla nota proprietà dovuta ad Jacobi e cioè che le soluzioni di $E_n(y) = 0$ sono i minori dell'ultima riga del wronskiano W di un sistema fondamentale

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Ugo Amaldi nella riunione del 7 giugno 1949.

(1) CELS, *Sur les equations differentielles lineaires ordinaires* (« Ann. de l'Ecole Normale Superieure », Tomo VIII).

di soluzioni di $E(y)=0$, divisi per il wronskiano stesso, generalizza notevolmente l'aggiunta di Lagrange, introducendo quelle che chiama le « *aggiunte di una data riga di* W » e cioè quelle equazioni che hanno per soluzioni i minori di una data riga di W, divisi per W. Si hanno così le n aggiunte $E_k(y)=0$ $(k=1,2,\dots n)$ dette rispettivamente aggiunte della $1^a, 2^a, \dots, n^{ma}$ riga di W (¹); indicando con $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione data $E(y)=0$ e con $(y_{k,1}, y_{k,2}, \dots, y_{k,n})$ un sistema fondamentale di soluzioni di $E_k(y)=0$, avremo cioè per definizione:

$$y_{k,i} = \frac{1}{W} \cdot \frac{\partial W}{\partial y_i^{(k-1)}} \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

Per ottenere tali equazioni aggiunte il CELS stabilisce un procedimento che si rivela in pratica quasi irrealizzabile (eccetto che per $k=1$ e $k=n$ (²)) per l'enorme complessità di calcoli a cui conduce, come appare evidente tra l'altro da tutta una serie di lavori successivi tra cui, notevoli, quelli del GRUNFELD (³), nei quali si determinano le aggiunte della 2^a, 3^a, 4^a riga.

2. – Credo quindi utile, tanto più che in un'opportuna generalizzazione di ciò consiste il procedimento che ci permetterà, in maniera del tutto spontanea, di giungere alla definizione dell'aggiunto (di Lagrange) di un dato sistema differenziale lineare, accennare brevemente ad un metodo del tutto elementare che ci fa ottenere, *mediante sole operazioni di derivazione e di eliminazione*, una qualunque aggiunta $E_k(y)=0$ di una data equazione lineare $E(y)=0$.

(¹) L'aggiunta di Lagrange, evidentemente, non è che l'aggiunta dell'n^{ma} riga.

(²) Per $k=1$ si ha la così detta aggiunta della prima riga, che si trova esser definita da

$$E_1(y) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{y'}{a_n}\right) - \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(\frac{a_1 y'}{a_n}\right) + \dots + \\ + (-1)^{n-2}\frac{dx}{d}\left(\frac{a_{n-2}\,y'}{a_n}\right) + (-1)^{n-1}\left(\frac{a_{n-1}\,y'}{a_n}\right) + (-1)^n y = 0$$

(³) GRUNFELD, *Ueber den zusammenhang zwischen den Fundamentaldeterminanten einer linearen Differentialgleichungen n^{te} Ordnung und ihrer n Adjungirten* (« Journal fur die reine und angewandte Mathematik ». Vol. 15).

Per semplicità di scrittura, e dato che ciò non rappresenta alcuna limitazione al procedimento, supporremo $k=n$; sia allora

$$W = w(y_1 y_2 \ldots\ldots y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots\ldots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \ldots\ldots & y'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots\ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

il wronskiano di un sistema fondamentale di soluzioni della [1], che indicheremo simbolicamente con

$$[y, y', y'', \ldots, y^{(n-2)}, y^{(n-1)}] \;,$$

mentre indicheremo con il simbolo

$$[y, y', \ldots, y^{(k-1)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n-1)}]$$

uno qualunque dei suoi n minori della riga $(k+1)^{ma}$. Ciò premesso, ricordando la formula di Liouville $\frac{dW}{dx} = -a_1 W$ e posto $z_i = \frac{1}{W} \frac{\partial W}{\partial y_i^{(n-1)}}$ (per $i = 1, 2, \ldots, n$), cioè simbolicamente

$$z = \frac{1}{W} \frac{\partial W}{\partial y^{(n-1)}} = \frac{[y, y', \ldots, y^{(n-3)}, y^{(n-2)}]}{W} \;,$$

derivando rispetto alla variabile indipendente x, si attiene

$$z' = \frac{[y, y', \ldots, y^{(n-3)}, y^{(n-1)}]}{W} + a_1 z \;;$$

derivando di nuovo segue

$$z'' = \frac{[y, y', \ldots, y^{(n-4)}, y^{(n-2)}, y^{(n-1)}]}{W} + \frac{[y, y', \ldots, y^{(n-3)}, y^{(n)}]}{W} + \\ + \frac{a_1 [y, y', \ldots, y^{(n-3)}, y^{(n-1)}]}{W} + [a_1 z]'$$

o anche, eliminando $y^{(n)}$ per mezzo della [1]:

$$z'' = \frac{[y, y', \dots, y^{(n-4)}, y^{(n-2)}, y^{(n-1)}]}{W} - [a_2 z] + [a_1 z]' \,.$$

Così continuando, cioè derivando ed eliminando successivamente, otteniamo per z una equazione differenziale lineare dell'ordine n che non è altro, appunto, che l'aggiunta di Lagrange.

3. – Questo procedimento, se anche a prima vista può apparire un po' laborioso, per quanto di carattere del tutto elementare, ha in compenso il grande vantaggio di potersi applicare in generale, come appare evidente, alla determinazione di una qualunque $E_k(y) = 0$ (¹); inoltre tale procedimento, come si è sopra accennato, acquista per noi un'importanza del tutto particolare, per il fatto che ci permetterà di stabilire il sistema aggiunto di un dato sistema lineare.

§ 2. – Definizione e costruzione del sistema aggiunto (di Lagrange) di un dato sistema differenziale lineare ordinario.

4. – *Definizioni*: *a*) Un sistema differenziale lineare, in cui tutte le equazioni siano dell'ordine n, lo diremo *sistema differenziale lineare dell'ordine* n (²).

b) Un sistema differenziale lineare lo diremo *di classe* m se contiene m equazioni in altrettante funzioni incognite; diremo infine *rango del si-*

(¹) Per es. se volessimo l'aggiunta della seconda riga di $E(y) = y''' + ay' + by = 0$, porremmo $z = [y\,y'']$ da cui, derivando tre volte successivamente

$$z' = [y'\,y''] - a[y\,y'] \,; \quad z'' + (az) = (b - a')[y\,y'] \,; \quad z''' + (a' - b)\,z = (b' - a'')[y\,y']$$

ed eliminando $[y\,y']$ tra seconda e terza, segue senz'altro per l'equazione cercata

$$E_2(z) \equiv z''' - \frac{b' - a''}{b - a'} z'' - \left[b - a' - \frac{(b' - a'')\,a}{b - a'}\right] z = 0 \,.$$

(²) Se una (o più) equazioni del sistema fosse di ordine minore di n, potremmo sempre ridurci al caso generale, derivando l'equazione stessa un opportuno numero di volte. Osserviamo piuttosto che con questa definizione, l'*ordine* di un sistema lineare viene a significare qualche cosa di diverso da ciò che significa nelle equazioni lineari, per le quali l'ordine rappresenta *anche* il numero delle costanti arbitrarie che figurano nell'integrale generale.

stema il prodotto mn. Evidentemente *il rango di un sistema ci dà il numero delle costanti arbitrarie che figurano nel suo integrale generale.*

5. – Ciò premesso, consideriamo da prima sistemi di seconda classe e, per sola semplicità di scrittura, supponiamoli di terzo ordine, cioè

$$[2] \qquad \begin{cases} y''' + p_{11} y'' + p_{12} y' + p_{13} y + q_{11} z'' + q_{12} z' + q_{13} z = 0 \\ z''' + p_{21} y'' + p_{22} y' + p_{23} y + q_{21} z'' + q_{22} z' + q_{23} z = 0 \ ; \end{cases}$$

il rango del sistema è $6 = 2.3$ e quindi un suo sistema fondamentale di soluzioni sarà costituito da sei coppie di soluzioni, con determinante

$$[3] \qquad W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \\ y_1' & y_2' & y_3' & y_4' & y_5' & y_6' \\ z_1' & z_2' & z_3' & z_4' & z_5' & z_6' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & y_4'' & y_5'' & y_6'' \\ z_1'' & z_2'' & z_3'' & z_4'' & z_5'' & z_6'' \end{vmatrix}$$

non identicamente nullo; tale determinante lo diremo il *wronskiano del sistema* e si ha per esso, come subito si verifica derivando, la formula notevole, che diremo *la formula di Liouville relativa ai sistemi lineari;*

$$[4] \qquad \frac{dW}{dx} + (p_{11} + q_{21}) W = 0 \ .$$

Indicando simbolicamente il wronskiano con

$$W \equiv [y\, z\, y'\, z'\, y''\, z'']$$

e ponendo, con evidente notazione simbolica

$$[5] \qquad \eta = \frac{[y\, z\, y'\, z'\, z'']}{W} \ , \quad \zeta = - \frac{[y\, z\, y'\, z'\, y'']}{W} \ ,$$

andiamo a determinare il sistema lineare a cui soddisfano i sei valori possibili di η e ζ. Derivando le [5], eliminando le derivate terze y''', z'''

per mezzo del sistema [2] e tenendo conto di [4] si ottiene senz'altro

$$\eta' = \frac{[y\, z\, y''\, z'\, z'']}{\mathrm{W}} + p_{11}\eta + p_{21}\zeta\,, \qquad \zeta' = \frac{-[y\, z\, y'\, z''\, y'']}{\mathrm{W}} + q_{11}\eta + q_{21}\zeta\;;$$

derivando ancora e procedendo analogamente segue

$$\begin{cases} \eta'' = \dfrac{[y'\, z\, y''\, z'\, z'']}{\mathrm{W}} - p_{12}\eta - p_{22}\zeta + [p_{11}\eta]' + [p_{21}\zeta]' \\[2ex] \zeta'' = \dfrac{-[y\, z'\, y'\, z''\, y'']}{\mathrm{W}} - q_{12}\eta - q_{22}\zeta + [q_{11}\eta]' + [q_{21}\zeta]' \end{cases}$$

ed infine, derivando una terza volta

$$[6] \quad \begin{cases} \}\eta''' - [p_{11}\eta]'' + [p_{12}\eta]' - [p_{13}\eta]\{ - \}[p_{21}\zeta]'' - [p_{22}\zeta]' + [p_{23}\zeta]\{ = 0 \\ \}\zeta''' - [q_{21}\zeta]'' + [q_{23}\zeta]' - [q_{23}\zeta]\{ - \}[q_{11}\zeta]'' - [q_{12}\zeta]' + [q_{13}\eta]\{ = 0 \end{cases}$$

che è il sistema differenziale cercato.

6. - Se ora indichiamo in generale con D^k l'operazione di derivazione $\dfrac{d^k}{dx^k}$, possiamo scrivere il sistema dato [2] sotto la forma simbolica

$$[2_1] \quad \begin{cases} [\mathrm{D}^3 + p_{11}\mathrm{D}^2 + p_{12}\mathrm{D} + p_{13}]\, y + [q_{11}\mathrm{D}^2 + q_{12}\mathrm{D} + q_{13}]\, z = 0 \\ [p_{21}\mathrm{D}^2 + p_{22}\mathrm{D} + p_{23}]\, y + [\mathrm{D}^3 + q_{21}\mathrm{D}^2 + q_{22}\mathrm{D} + q_{23}]\, z = 0 \end{cases}$$

o anche, più brevemente e sinteticamente:

$$[2_2] \qquad \begin{cases} \mathrm{A}_{11}(y) + \mathrm{A}_{12}(z) = 0 \\ \mathrm{A}_{21}(y) + \mathrm{A}_{22}(z) = 0 \end{cases}$$

dove A_{11}, A_{22} indicano *due operatari differenziali lineari del terzo ordine e* A_{12}, A_{21} *due operatori differenziali lineari del secondo ordine,* del tipo, rispettivamente:

$$\mathrm{A}_{ii} = \mathrm{D}^3 + a_1\mathrm{D}^2 + a_2\mathrm{D} + a_3\;; \quad \mathrm{A}_{ik} = b_1\mathrm{D}^2 + b_2\mathrm{D} + b_3\;.$$

In base a questo simbolismo potremo scrivere il sistema trovato [6] sotto la forma

$$[6_1]\quad \begin{cases} [D^3 - D^2 p_{11} + D p_{12} - p_{13}]\eta - [D^2 p_{21} - D p_{22} + p_{23}]\zeta = 0 \\ -[D^2 q_{11} - D q_{12} + q_{13}]\eta + [D^3 - D^2 q_{21} + D q_{22} - q_{23}]\zeta = 0 \end{cases}$$

o anche

$$[6_2]\quad \begin{cases} A_{11}^{(0)}(y) - A_{21}^{(0)}(\zeta) = 0 \\ -A_{12}^{(0)}(\eta) + A_{22}^{(0)}(\zeta) = 0 \end{cases}$$

se con $A_{ik}^{(0)}$ indichiamo l'operatore aggiunto di A_{ik} nel senso che a questa parola si dà nella teoria delle equazioni differenziali lineari ordinarie. (Vedi formule [1] e [1_1]) (1).

7. – Procedendo analogamente in generale, potremo enunciare la seguente *definizione*: *Preso un sistema differenziale lineare di seconda classe e di ordine qualunque*

$$\begin{cases} [D^n + p_{11} D^{n-1} + p_{12} D^{n-2} + \dots + p_{1,n-1} D + p_{1n}]\, y + \\ \quad + [q_{11} D^{n-1} + q_{12} D^{n-2} + \dots + q_{1,n-1} D + q_{1n}]\, z \equiv A_{11}(y) + A_{12}(z) = 0 \\ [p_{21} D^{n-1} + p_{22} D^{n-2} + \dots + p_{2,n-1} D + p_{2n}]\, y + \\ + [D^n + q_{21} D^{n-1} + q_{22} D^{n-2} + \dots + q_{2,n-1} D + q_{2n}]\, z \equiv A_{21}(y) + A_{22}(z) = 0 \end{cases}$$

(1) Il WILCZYNSKI nel suo classico libro «*Projective differential geometry of curves and ruled surfaces*» (cap. V), per quanto mi consti, è l'unico che sino ad ora abbia trattato (nel caso particolare di $m = n = 2$) dei sistemi aggiunti; egli però considera sistemi aggiunti diversi dai nostri, assai più complicati e non esprimibili sotto la forma simbolica (6_2). Tale complicazione dipende dal fatto che invece di considerare le espressioni $\frac{[yzz']}{W}$, $\frac{-[yzy']}{W}$, considera le altre $\frac{[zy'y']}{W}$, $\frac{-[yy'z']}{W}$, cioè, in altre parole, considera quello che, secondo la terminologia del CELS, potremmo chiamare «*sistema aggiunto della prima coppia di righe*», mentre noi consideriamo il «*sistema aggiunto dell'ultima coppia di righe*» (o aggiunto di Lagrange). Anche il sistema aggiunto del WILCZINSKI, naturalmente, si può ottenere più rapidamente con il nostro procedimento di derivazione ed eliminazione, mentre egli lo ottiene in maniera assai faticosa e non facilmente generalizzabile.

chiamasi suo sistema aggiunto di Lagrange, il sistema, pure di seconda classe e di egual ordine

$$\left\{\begin{array}{l} [D^n - D^{n-1} p_{11} + D^{n-2} p_{12} + \dots + (-1)^{n-1} D\, p_{1,n-1} + (-1)^n p_{1n}]\eta - \\ -[D^{n-1} p_{21} - D^{n-2} p_{22} + \dots + (-1)^{n-2} D p_{2,n-1} + (-1)^{n-1} p_{2n}]\zeta \equiv A_{11}^{(0)}(\eta) - A_{21}^{(0)}(\zeta) = 0 \\ \\ -[D^{n-1} q_{11} - D^{n-2} q_{12} + \dots + (-1)^{n-2} D\, q_{1,n-1} + (-1)^{n-1}]\eta + \\ +[D^n - D^{n-1} q_{21} + D^{n-2} q_{22} + \dots + (-1)^{n-1} D q_{2,n-1} + (-1)^n q_{2n}]\zeta \equiv -A_{12}^{(0)}(\eta) + A_{22}^{(0)}(\zeta) = 0 \end{array}\right.$$

dove con $A_{ik}^{(0)}$ *si indicano gli operatori differenziali lineari aggiunti degli operatori* A_{ik}.

8. – Come risulta evidente dalla natura stessa del processo di formazione dei sistemi aggiunti di classe 2, la definizione precedente si potrà senz'altro estendere al caso di un sistema differenziale di classe pari qualunque; però, per poter giustificare in generale la definizione che daremo di sistema aggiunto, occorre mostrare come tale processo valga anche per i sistemi di classe dispari.

A tale scopo consideriamo, per semplicità di scrittura, un sistema di classe 3 e ordine 2, che indicheremo simbolicamente nella seguente maniera

$$\left\{\begin{array}{l} [D^2 + p_{11} D + p_{12}]y + [q_{11} D + q_{12}]z + [r_{11} D + r_{12}]t \equiv A_{11}(y) + A_{12}(z) + A_{13}(t) = 0 \\ \\ [p_{21} D + p_{22}]y + [D^2 + q_{21} D + q_{22}]z + [r_{21} D + r_{22}]t \equiv A_{21}(y) + A_{22}(z) + A_{23}(t) = 0 \\ \\ [p_{31} D + p_{32}]y + [q_{31} D + q_{32}]z + [D^2 + r_{31} D + r_{32}]t \equiv A_{31}(y) + A_{32}(z) + A_{33} = 0 \end{array}\right.$$

Poichè il rango di esso è 6, un sistema fondamentale di soluzioni sarà formato con sei terne $(y_i, z_i, t_i)\,(i = 1, 2 \dots 6)$ di soluzioni, tali che il determinante

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 & t_6 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 & y'_4 & y'_5 & y'_6 \\ z'_1 & z'_2 & z'_3 & z'_4 & z'_5 & z'_6 \\ t'_1 & t'_2 & t'_3 & t'_4 & t'_5 & t'_6 \end{vmatrix},$$

che chiameremo, al solito, *wronskiano del sistema*, non sia identicamente nullo. In questo caso la formula di Liouville diventa

$$\frac{dW}{dx} + (p_{11} + q_{21} + r_{31})\, W = 0 \tag{7}$$

ed allora ponendo

$$\eta = \frac{[y\,z\,t\,z'\,t']}{W}\,, \qquad \zeta = \frac{-[y\,z\,t\,y'\,z']}{W}\,, \qquad \tau = \frac{[y\,z\,t\,y'\,z']}{W}$$

andremo a stabilire il sistema differenziale a cui soddisfano le sei terne possibili di valori di η, ζ, τ. Derivando una prima volta ed eliminando le y'', z'', t'', mediante il sistema dato, a causa della [7], segue senz'altro

$$\left\{\begin{aligned} &\eta' = \frac{[y'ztz't']}{W} + p_{11}\eta + p_{21}\zeta + p_{31}\tau\,, \qquad \zeta' = \frac{-[yz'ty't']}{W} + q_{11}\eta + q_{21}\zeta + q_{31}\tau \\ &\qquad\qquad \tau' = \frac{[y\,z\,t'\,y'\,z']}{W} + r_{11}\eta + r_{21}\zeta + r_{31}\tau \end{aligned}\right.$$

e derivando ancora

$$\left\{\begin{aligned} &\{\eta'' - [p_{11}\eta]' + [p_{12}\eta]\} - \{[p_{21}\zeta]' - [p_{22}\zeta]\} - \{[p_{31}\tau]' - [p_{32}\tau]\} = 0 \\ -&\{[q_{11}\eta]' - [q_{12}\eta]\} + \{\zeta'' - [q_{21}\zeta]' + [q_{22}\zeta]\} - \{[q_{31}\tau]' - [q_{32}\tau]\} = 0 \\ -&\{[r_{11}\eta]' - [r_{12}\eta]\} - \{[r_{21}\zeta]' - [r_{22}\zeta]\} + \{\tau'' - [r_{31}\tau] + [r_{32}\tau]\} = 0 \end{aligned}\right.$$

che possiamo senz'altro scrivere simbolicamente

$$\left\{\begin{aligned} A_{11}^{(0)}(\eta) - A_{21}^{(0)}(\zeta) - A_{31}^{(0)}(\tau) &= 0 \\ -A_{12}^{(0)}(\eta) + A_{22}^{(0)}(\zeta) - A_{32}^{(0)}(\tau) &= 0 \\ -A_{13}^{(0)}(\eta) - A_{23}^{(0)}(\zeta) + A_{33}^{(0)}(\tau) &= 0 \end{aligned}\right.$$

9. – In base a ciò che precede resta pienamemte giustificata la seguente

DEFINIZIONE GENERALE: *Preso un sistema differenziale lineare ordinario (di forma normale) di ordine e classe qualunque, che scriveremo sotto la forma simbolica*

$$
[\mathrm{I}] \qquad \begin{cases} A_{11}(y_1) + A_{12}(y_2) + \ldots + A_{1m}(y_m) = 0 \\ A_{21}(y_1) + A_{22}(y_2) + \ldots + A_{2m}(y_m) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{m1}(y_1) + A_{m2}(y_2) + \ldots + A_{mm}(y_m) = 0\ , \end{cases}
$$

diremo suo sistema aggiunto secondo Lagrange, il sistema lineare definito simbolicamente da

$$
[\mathrm{II}] \qquad \begin{cases} A_{11}^{(0)}(\eta_1) - A_{21}^{(0)}(\eta_2) - \ldots - A_{m1}^{(0)}(\eta_m) = 0 \\ -A_{12}^{(0)}(\eta_1) + A_{22}^{(0)}(\eta_2) - \ldots - A_{m2}^{(0)}(\eta_m) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -A_{1m}^{(0)}(\eta_1) - A_{2m}^{(0)}(\eta_2) - \ldots + A_{mm}^{(0)}(\eta_m) = 0 \end{cases}
$$

dove gli A_{ii} *indicano operatori differenziali lineari dell'ordine* n *della forma*

$$
A_{ii} \equiv D^n + a_{ii1} D^{n-1} + a_{ii2} D^{n-2} + \ldots + a_{ii,n-1} D + a_{iin}
$$

gli A_{ik} *indicano operatori differenziali lineari dell'ordine* $n-1$ *della forma*

$$
A_{ik} \equiv a_{ik1} D^{n-1} a_{ik2} D^{n-2} + \ldots + a_{ik,n-1} D + a_{ikn}
$$

e gli $A_{ik}^{(0)}$ *indicano gli operatori differenziali lineari aggiunti degli* A_{ik} *cioè*

$$
\begin{cases} A_{ii}^{(0)} \equiv D^n - D^{n-1} a_{ii1} + D^{n-2} a_{ii2} + \ldots + (-1)^{n-1} D\, a_{ii,n-1} + (-1)^{n-1} a_{ikn} \\ A_{ik}^{(0)} \equiv D^{n-1} a_{ik1} - D^{n-2} a_{ik2} + \ldots + (-1)^{n-2} D\, a_{ik,n-1} + (-1)^{n-1} a_{ikn} \end{cases}
$$

Il sistema [II], aggiunto del sistema [I], ha come sistema fondamentate di soluzioni i minori delle ultime m righe del wronskiano del sistema [I], divisi per il wronskiano stesso e presi a segni alternati, cioè

$$[8]\quad \eta_i=\frac{(-1)^{i-1}}{W}W\left(y_1\ldots y_m; y'_1\ldots y'_m;\ldots; y_1^{(n-2)}\ldots y_m^{(n-2)}; y_1^{(n-1)}\ldots y_{i-1}^{(n-1)}, y_{i+1}^{(n-1)}\ldots y_m^{(n-1)}\right)$$

§ 3. – Proprietà fondamentali dei sistemi aggiunti.

10. – Indicando con W il wronskiano di un sistema fondamentale di soluzioni del sistema [I] e con $W^{(0)}$ quello del sistema aggiunto [II], relativo alle soluzioni corrispondenti secondo le [8], si ha il

Teorema I: *Il prodotto dei due Wronskiani è l'unità*[1], *cioè* $W\cdot W^{(0)}=1$.

Senza limitare le generalità, limitiamoci, per semplicità di scrittura al caso di $m=2$, $n=3$; allora sarà 6 il rango del sistema e quindi i due wronskiani saranno dati da

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 & y'_4 & y'_5 & y'_6 \\ z'_1 & z'_2 & z'_3 & z'_4 & z'_5 & z'_6 \\ y''_1 & y''_2 & y''_3 & y''_4 & y''_5 & y''_6 \\ z''_1 & z''_2 & z''_3 & z''_4 & z''_5 & z''_6 \end{vmatrix},\quad W^{(0)}=\begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & \eta_5 & \eta_6 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 & \zeta_5 & \zeta_6 \\ \eta'_1 & \eta'_2 & \eta'_3 & \eta'_4 & \eta'_5 & \eta'_6 \\ \zeta'_1 & \zeta'_2 & \zeta'_3 & \zeta'_4 & \zeta'_5 & \zeta'_6 \\ \eta''_1 & \eta''_2 & \eta''_3 & \eta''_4 & \eta''_5 & \eta''_6 \\ \zeta''_1 & \zeta''_2 & \zeta''_3 & \zeta''_4 & \zeta''_5 & \zeta''_6 \end{vmatrix}.$$

Per la definizione delle η_i, ζ_i, in base alle proprietà fondamentali dei determinanti potremo senz'altro scrivere le identità

$$[9]\quad \begin{cases} \sum_6^1{}_i\, y_i\,\eta_i=0 & \sum_1^6{}_i\, y'_i\,\eta_i=0 & \sum_1^6{}_i\, y''_i\,\eta_i=1 \\ \sum_1^1{}_i\, z_i\,\eta_i=0 & \sum_1^6{}_i\, z'_i\,\eta_i=0 & \sum_1^6{}_i\, z''_i\,\eta_i=0 \end{cases}$$

$$[9_1]\quad \begin{cases} \sum_1^6{}_i\, y_i\,\zeta_i=0 & \sum_1^6{}_i\, y'_i\,\zeta_i=0 & \sum_1^6{}_i\, y''_i\,\zeta_i=0 \\ \sum_1^6{}_i\, z_i\,\zeta_i=0 & \sum_1^6{}_i\, z'_i\,\zeta_i=0 & \sum_1^6{}_i\, z''_i\,\zeta_i=1 \end{cases}$$

(1) Questo teorema estende ai sistemi quello dato dal Frobenius nel Vol. 77 del Giornale di Crelle e ritrovato per altra via dal Grunfeld (*loc. cit.* a nota (3), pag. 10), relativo ai wronskiani di un'equazione lineare e della sua aggiunta di Lagrange.

da cui, derivando le prime quattro delle [9] e [9_1] e tenendo conto delle [9] e [9_1] stesse, risulta anche

$$[10] \quad \begin{cases} \sum_1^6{}_i\, y_i\, \eta'_i = 0 & \sum_1^6{}_i\, y'_i\, \eta'_i = -1 \\ \sum_1^6{}_i\, z_i\, \eta'_i = 0 & \sum_1^6{}_i\, z'_i\, \eta'_i = 0 \end{cases}$$

$$[10_1] \quad \begin{cases} \sum_1^6{}_i\, y_i\, \zeta'_i = 0 & \sum_1^6{}_i\, y'_i\, \zeta'_i = 0 \\ \sum_1^6{}_i\, z_i\, \zeta'_i = 0 & \sum_1^6{}_i\, z'_i\, \zeta'_i = -1 \end{cases}$$

Ciò premesso eseguiamo il prodotto per righe dei due wronskiani ed avremo, per le relazioni precedenti

$$\mathrm{W\,W^{(0)}} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_1^6{}_i y_i\, \eta''_i & \sum_1^6{}_i y_i\, \zeta''_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_1^6{}_i z_i\, \eta''_i & \sum_1^6{}_i z_i\, \zeta''_i \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \sum_1^6{}_i y'_i\, \eta''_i & \sum_1^6{}_i y'_i\, \zeta''_i \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \sum_1^6{}_i z'_i\, \eta''_i & \sum_1^6{}_i z'_i\, \zeta''_i \\ 1 & 0 & \sum_1^6{}_i y''_i \eta''_i & \sum_1^6{}_i y'' \zeta''_i & \sum_1^6{}_i y''_i \eta''_i & \sum_1^6{}_i y''_i \zeta''_i \\ 0 & 1 & \sum_1^6{}_i z''_i \eta''_i & \sum_1^6{}_i z''_i \zeta''_i & \sum_1^6{}_i z''_i \eta''_i & \sum_1^6{}_i z''_i \zeta''_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_1^6{}_i y_i \eta''_i & \sum_1^6{}_i y_i \zeta''_i \\ \sum_1^6{}_i z_i \eta''_i & \sum_1^6{}_i z_i \zeta''_i \end{vmatrix}$$

Derivando ora le prime due delle [10], [10_1] e tenendo conto delle [10], [10_1] stesse segue anche

$$\begin{cases} \sum_1^6{}_i\, y_i\, \eta''_i = 1 & \sum_1^6{}_i\, z_i\, \eta''_i = 0 \\ \sum_1^6{}_i\, y_i\, \zeta''_i = 0 & \sum_1^6{}_i\, z_i\, \zeta''_i = 1 \end{cases} \quad (^1)$$

---

(1) Con questo stesso procedimento, si possono ottenere le espressioni di tutte le sommatorie che figurano nel determinante prodotto W $\mathrm{W^{(0)}}$, ma siccome tali espres-

da cui senz'altro

$$\mathrm{W}\,\mathrm{W}^{(0)} = 1 \qquad \text{c. d. d.}$$

11. – Ne segue il Corollario I: *Se le* $r = mn$ ennuple

$$(y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{im}) \qquad (i = 1, 2, \ldots r)$$

costituiscono un sistema fondamentale per il sistema [I], *le soluzioni corrispondenti, secondo le* [8], *del sistema aggiunto* [II] *costituiscono pure un sistema fondamentale di soluzioni.*

12. – Consideriamo ora un qualunque sistema lineare [I] e il corrispondente sistema [II] e supponendo al solito, per semplicità di scrittura, $m = n = 3$, indichiamo con

$$\mathrm{L}_1(y),\ \mathrm{L}_2(y),\ \mathrm{L}_3(y)\ ;\quad \Lambda_1(\eta),\ \Lambda_2(\eta),\ \Lambda_3(\eta)$$

i primi membri delle equazioni dei due sistemi.

---

sioni non servono al nostro scopo ci limitiamo a riportarle, in quanto per sè interessanti:

$$\left\{\begin{array}{llll}
\sum y''_i \eta'_i = p_{11}, & \sum y''_i \zeta'_i = q_{11}, & \sum z''_i \eta'_i = p_{21}, & \sum z''_i \zeta'_i = q_{21} \\
\sum y'_i \eta''_i = -p_{11}, & \sum y'_i \zeta''_i = -q_{11}, & \sum z'_i \eta''_i = -q_{21}, & \sum z'_i \zeta''_i = -q_{21} \\
\multicolumn{2}{l}{\sum y''_i \eta''_i = p'_{11} + p^2_{11} - p_{12} + q_{11} p_{21},} & \multicolumn{2}{l}{\sum y''_i \zeta''_i = q'_{11} + q_{11}(p_{11} + q_{21}) - q_{12}} \\
\multicolumn{2}{l}{\sum z''_i Z''_i = q'_{11} + q^2_{21} - q_{22} + q_{11} p_{21},} & \multicolumn{2}{l}{\sum z''_i \eta''_i = p'_{21} + p_{21}(p_{11} + q_{21}) - p_{22}}
\end{array}\right.$$

Del resto, che il prodotto $\mathrm{W}\,\mathrm{W}^{(0)}$ risultasse costante, si poteva vedere semplicemente nella seguente maniera: il sistema aggiunto ha come coefficienti di $\eta_i^{(n-1)}$ nella iesi$^{\text{ma}}$ equazione l'opposto del coefficiente della $y_i^{(n-1)}$ nella iesima equazione del sistema dato e quindi, per la formula di Liouville risulta

$$\frac{d\mathrm{W}}{dx} + \sum a_{ii1}\,\mathrm{W} = 0\ , \qquad \frac{d\mathrm{W}^{(0)}}{dx} - \sum a_{ii1}\,\mathrm{W}^{(0)} = 0$$

da cui

$$\frac{d(\mathrm{W}\,\mathrm{W}^{(0)})}{dx} = \mathrm{W}^{(0)}\frac{d\mathrm{W}}{dx} + \mathrm{W}\frac{d\mathrm{W}^{(0)}}{dx} = 0$$

cioè $\mathrm{W}\,\mathrm{W}^{(0)} = \text{cost.}^{\text{te}}$. Ma l'importanza del teorema consiste nel verificare che la costante è diversa da zero.

Detto allora η_1, η_2, η_3 tre funzioni del tutto arbitrarie della x (purchè derivabili quanto occorre) andiamo a calcolarci l'espressione

$$\int (\eta_1 L_1 + \eta_2 L_2 + \eta_3 L_3)\, dx \ ;$$

integrando per parti e tenendo conto delle identità

$$\left\{\begin{array}{l} \int \eta y''' dx = \eta y'' - \eta' y' + \eta'' y - \int y \eta''' dx \\ \int \eta\, a_{iml} y'' dx = y'[a_{iml}\eta] - y[a_{iml}\eta]' + \int y [a_{iml}\eta]'' dx \\ \int \eta\, a_{iml} y' \, dx = y[a_{iml}\eta] - \int y [a_{iml}\eta]' dx \end{array}\right.$$

risulta senz'altro

$$\int(\eta_1 L_1 + \eta_2 L_2 + \eta_3 L_3) dx = \sum_1^3{}_i (\eta_i y'' - \eta_i' y'_i + \eta_i'' y_i) + \sum_1^3{}_k \Big\{ y'_k \sum_1^3{}_i a_{ik1}\eta_i \Big\} - \sum_1^3{}_k \Big\{ y_k \sum_1^3{}_i [a_{ik1}\eta_i]' \Big\} + $$
$$+ \sum_1^3{}_k \Big\{ \sum_1^3{}_i a_{ik2}\eta_i \Big\} - \int (y_1 \Lambda_1 + y_2 \Lambda_2 + y_3 \Lambda_3)\, dx$$

da cui si deduce che l'espressione

$$\int \sum_1^3{}_i (\eta_i L_i) dx + \int \sum_1^3{}_i (y_i \Lambda_i) dx$$

risulta eguale ad un'espressione bilineare nelle y_i, η_i e nelle loro derivate prime e seconde. Procedendo analogamente in generale, possiamo enunciare il

TEOREMA II: *L'espressione*

$$\int \sum_1^m{}_i (\eta_i L_i) dx + \int \sum_1^m{}_i (y_i \Lambda_i) dx$$

dove $L_i(y)$, $\Lambda_i(\eta)$ *indicano rispettivamente i primi membri di un sistema differenziale lineare di ordine* n *e di classe* m *e del suo aggiunto, risulta eguale ad un'espressione bilineare nelle* y_i, η_i *e nelle loro derivate sino dll'ordine* $n-1$.

Indicando tale espressione bilineare con $\psi\binom{y}{\eta}$, si ha quindi la formula fondamentale

$$\text{[III]} \qquad \int \Big\{ \sum_1^m{}_i \eta_i L_i + \sum{}_i y_i \Lambda_i \Big\} dx = \psi\binom{y}{\eta} \ ;$$

l'espressione $\psi\binom{y}{\eta}$, in analogia a quanto si fa per le equazioni lineari, si chiamerà *l'espressione bilineare aggiunta* del sistema dato [I].

13. – Supponiamo ora che $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ sia una soluzione del sistema aggiunto; allora dalla [III] segue il Corollario II:

Se $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ rappresenta una soluzione del sistema aggiunto di un dato sistema lineare, l'espressione

$$\eta_1 L_1 + \eta_2 L_2 + \ldots + \eta_m L_m$$

risulta la derivata esatta di un'espressione bilineare nelle y_i, η_i e nelle loro derivate sino all'ordine $n-1$.

Infatti, sotto tale ipotesi, dalla [III] segue

$$[\mathrm{III}_1] \qquad \eta_1 L_1 + \eta_2 L_2 + \ldots + \eta_m L_m = \frac{d}{dx}\psi\binom{y}{\eta}$$

14. – Sia ora $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ una soluzione del sistema dato; dalla [III₁] si ottiene

$$\psi\binom{y}{\eta} = \text{cost.}^{\text{te}}$$

cioè l'equazione $\psi\binom{y}{\eta} = \text{cost.}^{\text{te}}$ ci fornisce un *integrale primo del sistema* [I]; se ne deduce che una volta integrato completamente il sistema aggiunto [II], cioè noti $r = mn$ sistemi $(\eta_{i_1}, \eta_{i_2}, \ldots, \eta_{i_m})$ (per $i = 1, 2, \ldots, r$) di soluzioni linearmente indipendenti, gli r integrali primi

$$\psi_i\binom{y_i}{\eta_i} = c_i \qquad (c_i = \text{cost.}^{\text{te}},\ i = 1, 2, \ldots r)$$

determineranno in una ed in una sola maniera altrettanti r sistemi $(y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_r})$ di soluzioni linearmente indipendenti del sistema dato [I], che quindi risulterà completamente integrato.

Analogamente, a causa della simmetria della [III], integrato il sistema dato, risulta integrato il sistema aggiunto e quindi possiamo enunciare il

Teorema III: *I due problemi di integrare un dato sistema lineare o il suo aggiunto sono del tutto equivalenti.*

15. – I risultati espressi dai teoremi [II] e [III] si possono ottenere anche più semplicemente per un'altra via che ha inoltre il vantaggio di determinarci immediatamente la forma esplicita dell'espressione bilineare aggiunta $\psi\binom{y}{\eta}$.

Proponiamoci a questo scopo di vedere se esistono $r=mn$ funzioni $A_{ik}(x)$ per $i=1,2,\dots m$; $k=1,2,\dots n$ tali che risulti identicamente

$$[11] \qquad \eta_1 L_1 + \eta_2 L_2 + \dots + \eta_m L_m = \frac{d}{dx}\sum_1^m{}_i \sum_1^n{}_k A_{ik}\, y_i^{(m-k)} \quad ;$$

sostituendo alle L_i le loro espressioni ed eseguendo i calcoli per il caso di $m=n=3$ risulta:

$$\sum_1^3{}_s\, \eta_s y_s''' + \sum_1^3{}_s \left\{ y_s''\left(\sum_1^3{}_i\, a_{is1}\eta_i\right)\right\} + \sum_1^3{}_s\left\{ y_s'\left(\sum_1^3{}_i\, a_{is2}\eta_i\right)\right\} + \sum_1^3{}_s\left\{ y_s\left(\sum_1^3{}_i\, a_{is3}\eta_i\right)\right\} =$$
$$= \sum_1^3{}_s\, A_{s1} y_s''' + \sum_1^3{}_s\left\{ y_s''(A_{s2}+A'_{s1})\right\} + \sum_1^3{}_s\left\{ y'_s(A_{s3}+A'_{s2})\right\} + \sum_1^3{}_s\, y_s A'_{s3}$$

da cui, eguagliando i coefficienti

$$[12] \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{s1} = \eta_s \ , \qquad A_{s2} + A'_{s1} = \sum\limits_1^3 a_{is1}\eta_s \\ \qquad\qquad A_{s3} + A'_{s2} = \sum\limits_1^3{}_i\, a_{is2}\,\eta_s \ , \quad A'_{s3} = \sum\limits_1^3{}_i\, a_{is3}\,\eta_s \\ \qquad\qquad\qquad \text{per } s=1,2,3. \end{array}\right.$$

Dalle ultime delle [12] segue

$$A'_{s3} + A''_{s2} = \sum_1^3{}_i [a_{is2}\eta_s]' \ , \quad A''_{s2} + A'''_{s1} = \sum_1^3{}_i [a_{is1}\eta_s]'' \ , \quad A'''_{s1} = \eta'''_{s3}$$

da cui

$$A'''_{s1} - A'_{s3} = \sum_1^3 [a_{is1}\eta_s]'' - \sum_1^3{}_i [a_{is2}\eta_s]'$$

ed infine

$$\Lambda_s(\eta) = \eta_s''' - \sum_1^3{}_i [a_{is1}\eta_s]'' + \sum_1^3{}_i [a_{is2}\eta_s]' - \sum_1^3{}_i [a_{is3}\eta_s] = 0 \ .$$

Se ne conclude che la [11] è possibile purchè si prendano per le funzioni

$$A_{11}\,,\ A_{21}\,,\ A_{31}$$

una soluzione del sistema aggiunto e per le altre A_{ik} le espressioni

$$A_{s2} = \sum_1^3{}_i\,[a_{is1}\,\eta_s] - \eta'_s\,, \quad A_{s2} = \sum_1^3{}_i\,[a_{is2}\,\eta_s]' - \sum_1^3{}_i\,[a_{is1}\,\eta_s] + \eta''_s$$

che si deducono dalle [12].

16. – La proprietà espressa dalla [III] e cioè che l'espressione

[13] $$\sum_1^m{}_i\,\eta_i\,L_i + \sum_1^m{}_i\,y_i\,\Lambda_i$$

sia la derivata esatta della forma bilineare aggiunta $\psi\binom{y}{\eta}$ è caratteristica per i sistemi aggiunti; si ha cioè il

TEOREMA IV: *Presi due sistemi lineari di egual ordine e classe*

$$L_i(y) = 0\ ,\quad \Lambda_i^*(\eta) = 0\ ,$$

se per tutte le possibili funzioni della x risulta che

[14] $$\sum_1^m{}_i\,\eta_i\,L_i + \sum_1^m{}_i\,y_i\,\Lambda_i^*$$

diventa la derivata esatta della forma bilineare aggiunta $\psi^*\binom{y}{\eta}$ relativa ai sistemi $L_i(y) = 0$, $\Lambda_i^*(y) = 0$, necessariamente il sistema $\Lambda_i^*(y) = 0$ coincide col sistema aggiunto del sistema dato $L_i(y) = 0$.

Infatti sottraendo membro a membro le [13] e [14] segue

$$\sum_1^m{}_i\,y_i\left\{\Lambda_i(\eta) - \Lambda_i^*(\eta)\right\} = \frac{d}{dx}\,(\psi - \psi^*)$$

da cui si deduce, osservando il primo membro, che l'espressione

$$\frac{d}{dx}\,(\psi - \psi^*)$$

dovrebbe risultare un'espressione lineare nelle sole y_i (e non anche nelle derivate) il che, evidentemente, è impossibile, data la natura delle ψ; dovrà quindi essere

$$\Lambda_i(\eta) - \Lambda_i^*(\eta) \equiv 0 \quad \text{cioè} \quad \Lambda_i(\eta) \equiv \Lambda_i^*(\eta)$$

(e quindi $\psi - \psi^* = \text{cost.}^{\text{te}}$) il che dimostra l'asserto.

17. – Da questo teorema discende poi immediatamente il seguente

Corollario III: *L'aggiunto dell'aggiunto è il sistema dato* (proprietà di reciprocità dei sistemi aggiunti).

Infatti sia $\lambda_i(y^*) = 0$ l'aggiunto del sistema aggiunto $\Lambda_i(\eta) = 0$; avremo

$$\sum_1^m {}_i\, y_i^* \Lambda_i + \sum_1^m {}_i\, \eta_i \lambda_i = \psi_{\cdot} \binom{\eta}{y^*}, \quad \sum_1^m {}_i\, y_i \Lambda_i + \sum_1^m {}_i\, \eta_i \mathrm{L}_i = \psi \binom{y}{\eta}$$

e quindi, per ciò che precede

$$\lambda_i \equiv \mathrm{L}_i\, .$$