PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

*ACTA*
*Vol. XII - N. 14*
pag. 141-160

# SUR LES EXTRÉMALES D'UNE CERTAINE INTÉGRALE I ET L'APPOINT QU'ELLES APPORTENT À UN THÉORÈME GÉNÉRAL D'UNICITÉ CONCERNANT L'INTÉGRALE D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE (*)

LA VALLÉE POUSSIN
*Academicien Pontifical*

SVMMARIVM. — Posito radio vectore alicuius puncti, quod planam lineam describat, extremalia eius integralis, respectu alicuius poli, si pro variabili sumatur arcus lineae, sunt hyperboles aequilaterae, quarum centrum est in ipso polo. Quod cum demonstraverit, Auctor computat quinam sit integralis valor secundum arcum extremalis, et quinam sit maximus valor si polus et extrema arcus certis condicionibus subiciantur. Ex iis quae invenit, Auctor, recentem a Ballieu propositam assertionem definiens, demonstrat theorema unicitatis, ut aiunt, pro integrali aequationis differentialis linearis.

## § 1. - Préliminaire

La présente Note a son origine dans un intéressant article de M. Ballieu qui paraîtra prochainement dans les « Bulletins de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique ».

Rappelons l'énoncé d'un théorème classique: Une intégrale $f(z)$ d'une équation différentielle linéaire homogène de l'ordre $n$ à coefficients holomorphes, est identiquement nulle si elle s'annule ainsi que ses $n-1$ premières dérivées en un point $z$; autrement dit, l'intégrale $f(z)=0$ est *unique* à vérifier cette conditions.

(*) Nota presentata nella Tornata dell'8 febbraio 1948.

Cette condition revient à dire que $f(z)$ a, au point $z$, une racine multiple d'ordre $n$. J'ai montré, il y a une vingtaine d'années («Annales de la Societé Scientifique de Bruxelles», 1829) que le théorème subsiste si l'on éparpille ces $n$ racines superposées dans un voisinage suffisamment immédiat autour du point $z$.

M. Ballieu s'est proposé une question analogue. Au lieu d'éparpiller les $n$ racines de $f(z)$, il éparpille les $n-1$ racines des dérivées successives, y compris une racine de $f(z)$, dans un domaine D; il se demande alors quelles restrictions il faut imposer à ce domaine D pour que le théorème d'unicité subsiste. Il donne à cette question nouvelle une réponse analogue à celle que j'avais donnée à la précédente.

Pour préciser la réponse, M. Ballieu fait intervenir une certaine intégrale que j'appelle I. Quoique M. Ballieu ne s'en occupe pas, les extrémales de cette intégrale se lient étroitement au problème. C'est l'étude de ces extrémales qui fait l'objet essentiel de cette Note. Leur étude nous a intéressé par la simplicité inattendue des résultats auxquels elle conduit. Elle apporte un léger appoint à la solution indiquée par M. Ballieu

## § 2. – Calcul et propriétés des extrémales de l'intégrale I.

1. *Definition de* I *et calcul des extrémales.* – Soit P un pôle donné et soit $r$ le rayon vecteur d'un point M qui décrit une ligne L dans le plan. Soit $ds$ la différentielle de l'arc de L. Nous considérons l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int r\, ds \ .$$

Nous nous proposons d'en déterminer les extrémales. Ce sont, nous allons le voir, *des hyperboles équilatères de centre* P. Nous en établirons quelques propriétés remarquables.

Les extrémales de I sont déterminées par la condition

$$\delta \int r\, ds = \int (\delta r\, ds + r\, \delta\, ds) = 0 \ .$$

Prenons le pôle P comme origine d'axes rectangulaires $x$, $y$ et considérons $y$ comme fonction de $x$. Comme $x$ ne reçoit pas de variation, nous avons

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad , \qquad \delta r = \frac{y\,\delta y}{r} \; ,$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 , \qquad \delta ds = \frac{dy\,\delta\,dy}{ds} = \frac{dy}{ds}\,d\,\delta y \; .$$

Il vient par intégration par parties,

$$\delta \int r\,ds = \int \left( \frac{y\,ds}{r}\,\delta y - \frac{r\,dy}{ds}\,d\,\delta y \right) = \int \left( \frac{y\,ds}{r} - d \cdot \frac{r\,dy}{ds} \right) \delta y \; .$$

De là, l'équation différentielle des extrémales

$$\frac{y\,ds}{r} - d \cdot \frac{r\,dy}{ds} = 0 \; ,$$

qui, multipliée par $\frac{r\,dy}{ds}$ prend la forme différentielle exacte

$$y\,dy - \frac{r\,dy}{ds}\,d \cdot \frac{r\,dy}{ds} = 0 \; .$$

Nous obtenons immédiatement l'intégrale première (avec une constante d'intégration $\lambda$)

$$\left( \frac{r\,dy}{ds} \right)^2 = y^2 + \lambda \; , \qquad \text{c. à. d.} \qquad \frac{(x^2+y^2)\,dy^2}{dx^2+dy^2} = y^2 + \lambda \; .$$

Cette équation se réduit à

[1] $$\left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = \frac{y^2+\lambda}{x^2-\lambda} \; .$$

Le changement de signe de $\lambda$ revient à la permutation de $x$ et $y$. Nous pouvons supposer $\lambda$ positif et le remplacer par $\lambda^2$. Remplaçons alors $x$ et $y$ par $\lambda x$ et $\lambda y$, ce qui revient à faire une similitude de centre P; nous obtenons

[2] $$\left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = \frac{y^2+1}{x^2-1} \; .$$

Posons

$$\begin{aligned} x &= \pm \operatorname{Ch} \varphi \; , & & & dx &= \pm \operatorname{Sh} \varphi \, d\varphi \; , & x^2 - 1 &= \operatorname{Sh}^2 \varphi \; , \\ y &= \operatorname{Sh} \psi \; , & &\text{d'où} & dy &= \operatorname{Ch} \psi \, d\psi \; , & y^2 + 1 &= \operatorname{Ch}^2 \psi \; ; \end{aligned}$$

l'équation [2] se reduit à

$$\left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right)^2 = 1 \qquad \text{d'où} \qquad \pm\psi = \varphi + \alpha \ .$$

L'intégrale générale de l'équation [2] est donc, sous forme parametrique et avec la constante d'intégration $\alpha$,

$$[3] \qquad \pm x = \mathrm{Ch}\,\varphi \qquad \pm y = \mathrm{Sh}\,(\varphi + \alpha) \ .$$

On forme l'équation en $x, y$ por l'élimination de $\varphi$. On a

$$\mathrm{Sh}(\varphi+\alpha) = \mathrm{Sh}\,\varphi\,\mathrm{Ch}\,\alpha + \mathrm{Ch}\,\varphi\,\mathrm{Sh}\,\alpha$$

$$[4] \qquad \begin{aligned} y &= \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{Ch}\,\alpha \pm x\,\mathrm{Sh}\,\alpha \\ (y \mp x\,\mathrm{Sh}\,\alpha)^2 &= (x^2-1)\,\mathrm{Ch}^2\,\alpha \\ y^2 \mp 2xy\,\mathrm{Sh}\,\alpha - x^2 &= -\,\mathrm{Ch}^2\,\alpha \end{aligned}$$

Ces extrémales particulières sont des hyperboles equilatères de centre P (pôle et origine des axes). Toutes les autres extrémales en sont aussi, car elles se déduisent des précédentes par une similitude de centre P ou par la permutation des axes de coordonneés.

Pour que l'hyperbole sort rapportée à ses axes de symétrie, il faut faire $\alpha = 0$. L'équation devient

$$[5] \qquad x^2 - y^2 = 1 \ .$$

C'est l'axe des $x$ qui est l'axe réel de la ligne, mois il est permis d'intervertir les axes des $x$ et des $y$, ce qui revient à changer le signe de $\lambda$ dans l'intégrale première [1].

Quand l'hyperbole est rapportée à ses axes de symétrie et que l'axe des $x$ est son axe reél, elle admet l'équation [5] en axes rectangulaires, et elle admet la représentation paramétrique

$$[6] \qquad \pm x = \mathrm{Ch}\,\varphi \ , \qquad y = \mathrm{Sh}\,\varphi \ .$$

Toutes les autres extrémales ayant les mêmes axes de symétrie et le même axe réel se dèduisent de la prècédente par une similitude de centre origine. Leur représetation paramètrique sera

$$[7] \qquad \pm x = \lambda\,\mathrm{Ch}\,\varphi \ , \qquad y = \lambda\,\mathrm{Sh}\,\varphi \ ,$$

et leur représentation cartésienne

[8] $$x^2 - y^2 = \lambda^2 .$$

A chacune des déterminations du signe ambigu donné à $x$ dans [6] ou dans [7], correspond une branche particulière de l'hyperbole.

2. *Calcul de* I. – Proposons-nous de calculer la valeur de l'intégrale I sur un arc d'extrémale ayant pour origine le sommet de la ligne. Dans la représentation [7] ci-dessus de l'hyperbole, le sommet est le point de parametre $\varphi = 0$ et de cordonnées $x = \lambda$, $y = 0$. On a

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 = \lambda^2(\mathrm{Ch}^2\varphi + \mathrm{Sh}^2\varphi) = \lambda^2\,\mathrm{Ch}\,2\varphi \\ ds^2 &= dx^2 + dy^2 = \lambda^2(\mathrm{Sh}^2\varphi + \mathrm{Ch}^2\varphi)\,d\varphi^2 = \lambda^2\,\mathrm{Ch}\,2\varphi\,d\varphi^2 \\ rds &= \lambda^2\,\mathrm{Ch}\,2\varphi\,d\varphi . \end{aligned}$$

Il vient ainsi immédiatement

[9] $$\mathrm{I} = \int^{\varphi} r\,ds = \frac{\lambda^2}{2}\,\mathrm{Sh}\,2\varphi = \lambda^2\,\mathrm{Sh}\,\varphi\,\mathrm{Ch}\,\varphi = |xy|$$

Ce résultat, applicable à toute extrémale rapportée à ses axes de symétrie, est d'une simplicité inattendue.

3. *Détermination d'une extrémale par deux points.* – Pour que l'on puisse relier deux points A et B par une extrémale de pôle P, il faut que l'on puisse faire passer par ces deux points la même branche d'une hyperbole équilatère de centre P. Pour cela, il est nécessaire et suffisant que les points A et B donnés soient vus du point P sous un certain angle (non nul) et que cet angle soit *aigu*. C'est ce que nous allons démontrer.

Donnous-nous des axes de coordonneés rectangulaires d'origine P. Une hyperbole équilatère de centre P a pour équation

$$x^2 + 2\lambda\,xy - y^2 = \mu ,$$

et les deux paramètres $\lambda$ et $\mu$ se déterminent uniformement par la condition de faire passer la ligne par les deux points A et B. Menons l'axe des $x$ par le point A, dont soit $x_1$ l'abscisse. La condition de passer par A de coordonneés $(x_1, 0)$ entraîne $\mu = x_1^2$; et l'équation de la courbe devient

$$x^2 + 2\lambda\, xy - y^2 = x_1^2 \ .$$

La condition de passer par B de coordonnées $(x_2, y_2)$ détermine $\lambda$, mais sous la réserve que le coefficient, $x_2 y_2$, de $\lambda$ ne soit pas nul, c'est à dire pourvu que le point B ne soit ni sur l'axe des $x$ ni sur celui des $y$, autrement dit pourva que AB ne soit ni en ligne droite avec P ni vu de P sous un angle droit. Dans ces deux cas, $\lambda$ devient infini et l'hyperbole, ramenée à $xy = 0$, se réduit à ses asymptotes. Excluons ces deux cas.

Les deux points A et B ainsi déterminés appartionnent à la même branche de l'hyperbole ou à deux branches différentes selon qu'ils sont vus du point P sous un angle aigu ou obtus. C'est ce qui résulte immediatement du fait que les deux branches d'une hyperbole équilatère sont respectivement comprises à l'intérieur de deux angles droits opposés formés par les asymptotes. L'hyperbole passant par A et B ne déterminera donc un arc d'extrémale reliant A et B que si ces deux points sont vus de P sous un angle aigu et cette condition est suffisante pourvu que les trois points P, A, B ne soient pas en ligne droite.

4. *Minima de l'integrale* I. – On donne le pôle P et les deux points A et B. Il s'agit de mener de A à B la ligne qui minime l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_{AB} r\, ds \ .$$

Cette intégrale ne peut admettre de maximum, mais elle admet un minimum. Si l'on peut joindre les deux points par un arc d'extrémale, cet arc (qui est unique) réalisera le minimum requis. Telle sera la solution si l'angle APB est aigu.

Si P est sur la droite AB, l'hyperbole dégènère dans ses asymptotes. C'est celle passant pur AB qui est l'extrémale; son segment AB minimise l'intégrale, ce qui est évident à priori.

Si l'angle APB est droit, l'hyperbole dégénère encore dans ses deux asymptotes. La ligne minimisante est formée des deux rayons consècutifs AP et PB et ce trajet angulaire passe par P.

Si l'angle APB est obtus, la conclusion est identique. En effet, toute ligne AB ne passant pas par P peut être interceptée par un angle droit de sommet P. On abaisse l'intégrale I sur cette ligne en substituant à l'arc intercepté $ab$ le parcours angulaire $a\mathrm{P} + \mathrm{P}b$. Donc la ligne minimisante passe par P. Il est evident qu'entre P et un autre point, la ligne minimisante est le rayon mené de P à ce point, ce qui justifie notre affirmation.

Le cas le plus simple est celui où les deux points A et B sont à la même distance du pôle P. Designons par P l'angle APB. Supposons-le d'abord aigu. Par raison de symétrie, l'axe réel de l'hyperbole qui passe par A et B sera bissectrice de l'angle P et partargera l'arc AB en deux parties symétriques se joignant au sommet. L'intégrale sur chaque moitié aura la même valeur $|xy|$ où $x$ et $y$ sont les coordonnées soit de A soit de B, de mêmes valeurs absolues $r \sin \dfrac{\mathrm{P}}{2}$, $r \cos \dfrac{\mathrm{P}}{2}$; donc

$$\mathrm{I} = 2r^2 \sin \frac{\mathrm{P}}{2} \cos \frac{\mathrm{P}}{2} = r^2 \sin \mathrm{P} \,. \tag{10}$$

Le résultat dans ce cas particulier est donc d'une simplicité digne de remarque: la valeur de I est double de l'aire du triangle APB.

Si l'angle P est droit, on a $\mathrm{I} = r^2$. Même résultat si P est obtus, car en ce cas,

$$\mathrm{I} = 2\int_0^r r\,dr = r^2 \,.$$

5. *Calcul de* I *dans le cas général.* - Un triangle quelconque APB est déterminé par deux côtés $r_1 = \mathrm{AP}$, $r_2 = \mathrm{BP}$ et leur angle P. Donc I s'exprime en fonction des trois mêmes éléments.

Nous supposons l'angle P aigu.

Deux cas son possibles: l'axe de l'hyperbole coupe ou ne coupe pas la base AB du triangle.

Dans le premier cas, cet axe portage l'arc d'extrémale AB en deux parties $\sigma_1$ et $\sigma_2$, et I est la somme des intégrales sur chacune des parties. Prenons le pôle P (centre de l'hyperbole) comme origine des axes $x, y$, et l'axe de la courbe comme axe des $x$. Nous avons, par la formule [9], en designant pur $x_1, y_1$ et $x_2, y_2$ les coordonnées de A et de B,

$$\mathrm{I} = |x_1 y_1| + |x_2 y_2|$$

Nous convenons que l'axe de $x$ positifs est memé du côté de AB, celui des $y$ positifs du côté de $r_1$. Alors $x_1$, $x_2$ et $y_1$ sont positifs, et $y_2$ est négatif. On a, par conséquent,

$$[11] \qquad I = x_1 y_1 - x_2 y_2 \; .$$

Si l'axe des $x$ ne coupe pas le segment AB, l'arc AB d'extrémale est la différence $\sigma_1 - \sigma_2$ des arcs $\sigma_1$ et $\sigma_2$ comptés jusque A et jusque B respectivement à partir du sommet. Donc I a pour valeur $|x_1 y_1| - |x_2 y_2|$, mais, cette fois, toutes les coordonnées sont positives et la formule [11] subsiste.

L'axe des $x$ fait avec la rayons $r_1$ et $r_2$ des angles $\alpha$ et $\beta$ que nous considérons, avec un signe, comme les arguments des points A et B en coordonnées polaires. Nous avons donc

$$x_1 = r_1 \cos\alpha\,, \quad y_1 = r_1 \sin\alpha\,, \quad x_2 = r_2 \cos\beta\,, \quad y_2 = r_2 \sin\beta$$

et la relation fondamentale (résultant de nos conventions de signe)

$$P = \alpha - \beta\,. \qquad (\alpha > 0 \text{ et } \alpha > \beta)$$

Substituons dans [11] les valeurs précédentes des coordonnées, il vient

$$[12] \qquad I = r_1^2 \sin\alpha\cos\alpha - r_2^2 \sin\beta\cos\beta = \frac{1}{2}\left[r_1^2 \sin 2\alpha - r_2^2 \sin 2\beta\right]$$

Il faut éliminer $\alpha$ et $\beta$ de cette formule.

Avec les axes choisis, l'hyperbole équilatère a pour équation

$$x^2 - y^2 = h^2\,,$$

où le paramètre $h$ dépend des éléments du triangle APB.

En coordonnées polaires $r$ et $\theta$ de pôle P, on a $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, et l'équation de l'hyperbole est en coordonnées polaires

$$r^2 \cos 2\theta = h^2\,.$$

Il est à remarquer qu'en vertu de cette equation, $\theta$ reste compris entre $\pm\frac{\pi}{4}$ et que, par conséquent, $\alpha$ et $\beta$ réstent compris entre les mêmes limites.

Substituons dans cette équation les coordonnées $r_1$, $\alpha$ et $r_2$, $\beta$ des points A et B, il vient

$$[13] \qquad r_1^2 = \frac{h^2}{\cos 2\alpha}\ , \quad r_2^2 = \frac{h^2}{\cos 2\beta}$$

d'où

$$[14] \qquad \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \frac{\cos 2\beta}{\cos 2\alpha} = \frac{\cos 2(\alpha - \mathrm{P})}{\cos 2\alpha} = \cos 2\mathrm{P} + \sin 2\mathrm{P}\ \mathrm{tg}\ 2\alpha$$

$$\mathrm{tg}\ 2\alpha = \frac{r_1^2 - r_2^2 \cos 2\mathrm{P}}{r_2^2 \sin 2\mathrm{P}}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{r_1^2 - r_2^2 \cos 2\mathrm{P}}{\sqrt{(r_1^2 \sin 2\mathrm{P})^2 + (r_1^2 - r_2^2 \cos 2\mathrm{P})^2}}\ .$$

Comme les formules [13] et celle $\alpha - \beta = \mathrm{P}$ dont nous avons tiré ces deux dernières, sont symétriques en $r_1$, $\alpha$ d'une part et $r_2$, $-\beta$ de l'autre, la valeur de $-\sin 2\beta$ se déduit de celle ci-dessus de $\sin 2\alpha$ par la permutation de $r_1$ et $r_2$. On porte ces valeurs de $\sin 2\alpha$ et de $-\sin 2\beta$ dans l'expression [12] de I et l'on obtient l'expression de I en fonction de $r_1, r_2$ et P. Cette expression est symétrique en $r_1$ et $r_2$ et, par conséquent, générale. Elle sa prète mal à la discussion, mais c'est celle qui répond à la question.

6. *Maxima de l'intégrale minimée sous des restrictions imposées.* — Nous appelons *intégrale minimée* celle qui est effectuée sur une extrémale. Si l'on impose des restrictions à la répartition des points P, A, B, on peut chercher parmi les répartitions permises celle qui maxime l'intégrale.

Voici d'abord une remarque générale.

Si l'on exige que les trois points P, A, B appartiennent à un domaine D simplement connexe, convexe et borné, le maximum de l'intégrale minimée I ne peut être atteint que si les trois points sont sur la frontière du domaine D. En effet, si l'un des deux points A, B est intérieur à D, on augmente l'intégrale I en prolongeant l'extrémale AB jusqu'à la frontière. Si le pôle P est interieur à D, on l'amène sur la frontière par déplacement d'ensemble du triangle PAB à l'intérieur de D (supposé convexe), ce qui n'altère pas I, et l'on revient au cas précédent.

Nous allons résondre quelques problèmes du genre indiqué. Nous considérons d'abord le cas où le domaine assigné est un cercle. Pour le maximum, les sommets du triangle PAB seront donc sur la circonférence.

7. *Premier problème.* – Soit AB une corde, non diamétrale, donnée dans une circonférence $\Gamma$ de rayon R. On fait varier le pôle P sur la circonférence. On considère l'intégrale I sur l'extrémale AB. On demainde comment varie I quand P décrit la circonférence, quelles sont les positions de P qui maximent ou miniment I et quelles sont les valeurs extrêmes de I?

Les points A et B partagent la circonférence $\Gamma$ en deux arcs AB inégaux. L'angle en P du triangle APB est aigu ou obtus selon que le pôle P se trouve sur le grand arc ou sur le petit. Nous devons distinguer ces deux cas.

1°. – Nous supposons d'abord que le pôle P se trouve sur le grand arc de circonférence AB et que l'angle P est aigu. Cet angle est constant quand P varie sur l'arc considéré.

Portons les valeurs [13] de $r_1^2, r_2^2$ dans l'expression [12] de I. Rappelons que celle-ci suppose $\alpha > 0$ et $> \beta$ auquel cas $\alpha - \beta = P$. Il vient, avec ces conventions,

$$\text{[15]} \qquad I = \frac{h^2}{2}(\mathrm{tg}\, 2\alpha - \mathrm{tg}\, 2\beta) = \frac{h^2 \sin 2P}{2\cos 2\alpha \cos 2\beta}\,.$$

Cette dernière expression est symetrique en $\alpha, \beta$ et indépendante de leurs signes. Elle est donc générale et indépéndante des conventions que nous venons de rappeler. Elle est d'une forme remarquablement simple, mais elle dépend de $h^2$ qui varie avec la disposition du triangle APB dans le cercle $\Gamma$. Il faut calculer $h^2$.

Dans le triangle APB, les côtés AP et BP sont $r_1$ et $r_2$. Soit $a$ la mesure de sa base AB; on a

$$r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos P = a^2\,,$$

et, en remplaçant $r_1$ et $r_2$ par leurs valeurs [13],

$$h^2\left[\frac{1}{\cos 2\alpha}+\frac{1}{\cos 2\beta}-\frac{2\cos P}{\sqrt{\cos 2\alpha\cos 2\beta}}\right]=a^2 .$$

Portons la valeur de $h^2$ tirée de là dans l'expression [14] ci-dessus de I, nous obtenons

$$I=\frac{a^2\sin P\cos P}{\cos 2\alpha+\cos 2\beta-2\cos P\sqrt{\cos 2\alpha\cos 2\beta}} .$$

Cette formule est indépendante d'hypothèses particulières sur $\alpha$ et $\beta$. Mais reprenons ces hypothèses: $\alpha>0$ et $\alpha>\beta$, d'où résulte $\alpha-\beta=P$. Posons alors

$$x=\cos 2(\alpha+\beta) ;$$

d'où

$$\cos(\alpha+\beta)=\sqrt{\frac{1+x}{2}} ;$$

nous aurons

$$\cos 2\alpha+\cos 2\beta=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=2\cos P\sqrt{\frac{1+x}{2}} ,$$

$$\cos 2\alpha\cos 2\beta=\frac{\cos 2(\alpha+\beta)+\cos 2(\alpha-\beta)}{2}=\frac{\cos 2P+x}{2} .$$

Substituons ces valeurs au dénominateur de la dernière expression de I, nous obtenons

$$I=\frac{\frac{a^2}{2}\sin P}{\sqrt{\frac{1+x}{2}}-\sqrt{\frac{\cos 2P+x}{2}}}=\frac{a^2\sin P}{1-\cos 2P}\left[\sqrt{\frac{1+x}{2}}+\sqrt{\frac{\cos 2P+x}{2}}\right]$$

Sour cette dernière forme, il apparaît que I est une fonction croissante de $x$. Son maximum est atteint pour $\alpha=-\beta$, en même temps que celui de $x=\cos 2(\alpha+\beta)$. Dans ce cas, $r_1=r_2$ en vertu des formules [13] et *le triangle* APB *est isoscèle.*

Soit R le rayon de la circonférence $\Gamma$; le triangle inscrit APB étant isoscèle, soit $r$ la valeur commune de $r$ et de $r_2$; on a

$$r=2R\cos\frac{P}{2} .$$

La valeur maximum de I est donnée par la formule [12] où il faut faire $r_1 = r_2 = r$ et $2\alpha = -2\beta = P$. Elle sera

$$I = r^2 \sin P = 4R^2 \sin P \cos^2 \frac{P}{2} .$$

La maximum de I est ainsi exprimé, quelle que soit la corde AB dans le cercle de rayon R, en fonction du seul angle P.

Nous avons placé le pôle P sur le petit arc AB de la circonférence Γ. Si P parcourt cet arc du milieu à l'extrémité, l'intégrale décroit constamment et atteint son *minimum sur l'arc* à l'extrémité de celui-ci. Il est facile de le vérifier. La formule [14] met en évidence que si $\frac{r_1}{r_2}$ croît de 1 à ∞, $2\alpha$ croît de $\frac{P}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, l'angle $\alpha+\beta = P - 2\alpha$ varie de 0 à $\frac{\pi}{2} - P$ avec un module croissant, alors $x = \cos 2(P - 2\alpha)$ décroît de 1 à $\cos(\pi - 2P)$.

Si P vient en B, $r_2 = 0$; l'extrémale est la corde AB elle-même (de longueur $a$), et le minimum de I sur l'arc considéré est

$$[17] \qquad I = \frac{a^2}{2} = 2R^2 \sin^2 P .$$

2°. Supposons en second lieu que le pôle que nous désignerons maintenant par P′ se tnouve sur le petit arc AB de la circonfèrence Γ. Dans ce cas, l'angle P′ du triangle AP′B est obtus. L'intégrale I s'etend aux deux côtés consèentifs $r_1$ et $r_2$, on a

$$I = \frac{r_1{}^2 + r_2{}^2}{2} .$$

Soient A, B, P′ les angles du triangle ABP′, R le rayon du cercle Γ on a

$$A + B + P' = \pi , \qquad r_1 = 2R \sin A , \qquad r_2 = 2R \sin B ,$$
$$I = 2R^2(\sin^2 A + \sin^2 B) = R^2(2 - \cos 2A - \cos 2B) ,$$
$$\cos 2A + \cos 2B = 2\cos(A+B)\cos(A-B) = -2\cos P' \cos(A-B);$$

par conséquent,

$$I = 2R^2[1 + \cos P' \cos (A - B)] .$$

Comme $\cos P'$ est négatif, I est minimé pour $A = B$, donc quand le triangle est isoscèle. C'est l'inverse de ce qui a lieu sur le grand arc AB.

Le minimum de I est

$$[18] \qquad I = 2R^2(1 + \cos P') = 4R^2 \cos^2 \frac{P'}{2}.$$

Ce minimum est atteint au milieu de l'arc AB de la circonférence, et I augmente avec $|A - B|$ si P' parcourt l'arc du milieu à l'extremité.

En résumé, si la corde AB n'est pas un diamètre et que le pôle décrive la circonférence, I acquiert ses valeurs extrêmes aux extrémités du diametre normal à AB, son maximum à la plus grande distance de la corde. Les valeurs de ces extrêmés sont:

$$4R^2 \sin P \cos^2 \frac{P}{2} \ (\max) \ , \qquad 4R^2 \sin^2 \frac{P}{2} \ (\min)$$

où P est l'angle inscrit dans le grand arc AB de $\Gamma$, lequel est le supplémentaire de P' (form. 16 et 18). L'intégrale I n'admet pas d'autre extrêmé quand P décrit la circonférence.

Dans le cas limite où la corde AB est un diamètre, l'angle P est droit et les valeurs extrêmes de I coïncident. Leur valeur commune est $2R^2 = \frac{a^2}{2}$. Dans ce cas, la valeur de I est invariable, quelle que soit la position du pôle P sur la circonférence $\Gamma$.

8. *Second probléme.* – Comment situer le pôle P et les deux points A et B sur la circonférence $\Gamma$ pour maximer I?

Nous allons montrer que *la triangle* APB *doit être équilatéral.*

Il faut d'abord que le triangle ABP soit isoscèle, car, s'il ne l'était pas, on augmenterait I en déplaçant le pôle P le long de $\Gamma$ jusqu'à le rendre isoscèle et de hauteur maximum. La valeur de I est alors $\sin P \cos^2 \frac{P}{2}$ par la formule [16], ce qui revient à $2 \sin \frac{P}{2} \cos^3 \frac{P}{2}$.

Pour obtenir le maximum de $\sin x \cos^3 x$, il faut annuler sa dérivée, à savoir

$$\cos^4 x - 3 \sin^2 x \cos^2 x = \cos^2 x(\cos^2 x - 3 \sin^2 x) = \cos^2 x(1 - 4 \sin^2 x).$$

Cette expression passe du positif au nègatif quand $\sin x$ passe par la valeur $\frac{1}{2}$ ou $x$ par la valeur $\frac{\pi}{6}$. Donc $\sin\frac{P}{2}\cos^3\frac{P}{2}$ est maximé par la valeur $P=\frac{\pi}{3}$ et le triangle isoscèle APB sera, par conséquent, équilatéral.

La valeur maximum de I sera donnée par la formule [16] où $\sin\frac{P}{2}=\frac{1}{2}$ et $\cos\frac{P}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ce sera

$$I = R^2\,\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ou, si l'on désigne par $h$ le diamètre du cercle $\Gamma$

$$[19] \qquad I = h^2\frac{3\sqrt{3}}{8} < \frac{2}{3}h^2 \; .$$

9. *Troisième problème.* – Quelle doit être la configuration du triangle APB pour que l'integrale I soit maximée sous la condition que la longueur de ses côtés ne surpasse pas un nombre assigné $h$.

Nous prouvons que, comme dans le cas précédent, *le triangle doit être équilatéral.* Supposons d'abord l'angle P aigu. Les points P et B sont alors de part et d'autre du diamètre passant par A.

Le triangle doit être isoscèle, car, s'il ne l'ètait pas on le rendrait isoscèle en déplaçant le pôle P sur la circonférence circonscrite, et l'on augmenterait ainsi l'intégrale tout en diminuant le plus grand côté de l'angle P. En effet, si AP est ce plus grand côté, il forme autour de A en s'écartant du diamètre passant par A.

Soit alors $r$ la longueur commune des deux côtés, on a [16]

$$I = r^2 \sin P \; .$$

La valeur de I est double de l'aire du triangle APB. Le périmètre du triangle ne peut surpasser $3h$. Or de tous les triangles isopérimètres, c'est le régulier qui enferme la plus grande aire. Donc le triangle est équilatéral, ces côtés sont de longueur $h$, l'angle $P=\frac{\pi}{3}$ et

$$[20] \qquad I = h^2\sin\frac{\pi}{3} = h^2\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{7}{8}h^2 \; .$$

Donc P est aigu, car, si P est obtus, on a $\mathrm{I} \gtreqless \frac{a^2}{2} \gtreqless \frac{h^2}{2}$ (n. 7, *in fine*).

*Remarque.* C'est le même problème qui a été rencontre et résolu par M. Ballieu, mais avec cette différence que l'intégrale I au lieu de se calculer sur l'extrémale entre A et B se calcule sur la côté AB lui-même du triangle. M. Ballieu à montré que, dans ce cas comme dans le nôtre, c'est le triangle équilateral qui fournit le maximum de I. Ce maximum est $k\,h^2$ avec la valeur

$$k = \frac{4 + 3\log 3}{8}$$

du coefficient $k$, supérieure à la valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}$ à laquelle nous ont conduit nos calculs, mais encore legèrement inférieure à l'unité.

Faisons encore, en passant, la remarque suivante:

Si l'on se posait le deuxième problème, celui où triangle APB est inscrit dans une circonférence, en définissant I comme le fait M. Ballieu, le maximum de I ne serait plus donné par le triangle équilatéral, mais par un triangle dont l'angle P serait légèrement plus ouvert. Ce n'est pas ici le lieu d'en faire le démonstration.

10. *Points en ligne droite.* – Le troisième problème devient particulièrement simple si les trois points P, A, B sont sur un segment rectiligne de longueur $h$. L'extremale est la portion AB de ce segment, et le maximum de I exige que A et B soient aux extrémités de ce même segment. Alors P aussi est l'une d'elles, car si P partage $h$ en deux segments $p$ et $q = h - p$, on ce

$$\mathrm{I} = \int_0^p + \int_0^q r\,dr = \frac{p^2 + q^2}{2} = \frac{h^2 - 2pq}{2} < \frac{h^2}{2}$$

et cette borne est atteinte pour $p = h$, $q = 0$. La valeur maximum de I est

$$\mathrm{I} = kh^2, \quad k = \frac{1}{2}\,.$$

C'est la plus petite valeur que puisse recevoir le coefficient $k$. Comme l'extrèmale est rectiligne, notre définition de I devient identique, en ce cas, à celle de M. BALLIEU.

Ce cas se présente, en particulier, si les points P, A, B sont réels.

## § 3. – APPLICATION À LA DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME D'UNICITÉ POUR L'INTÉGRALE D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE.

11. – *Évaluation prèliminaire d'une suite de dérivées.* – La dèmonstration du théorème d'unicité que nous avons en vue exïge, au préalable, certaines évaluations qui fout appel aux résultats obtenus dans la paragraphe précédent. Voici le problème:

Soit D un domaine, à contour simple et convexe, de diamètre $h$. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans ce domaine. On suppose que cette fonction et sa dérivée s'annulent chacune en un point correspondant de D. Sachant que le module de la dèrivée seconde $f''(z)$ admet une borne supérieure $u$ dans D, il s'agit d'en déduire des bornes correspondantes pour les modules de $f'$ et de $f$ dans D.

Supposons que $f'$ s'annule au point P, et soit $r$ la distance du point $z$ au point P. Comme on peut intégrer en ligne droite dans D (supposé convexe), on a

$$f'(z) = \int_{P}^{z} f''(z)\, dz \ , \qquad |f'(z)| \leqq ur \leqq uh \ .$$

Supposons ensuite que $f(z)$ s'annule au point A; on aura, ou point $z = B$ de D,

$$f(B) = \int_{A}^{B} f'(z)\, dz \ , \qquad |f(B)| \leqq u\mathrm{I} \ , \qquad \mathrm{I} = \int_{A}^{B} r\, ds \ .$$

L'intégrale de $f'$, supposée holomorphe, est indépendante du chemin suivi entre A et B dans D. Nous pouvons choisir comme chemin l'extrèmale de I, car, l'hyperbole tournant sa convexité vers les centre, est intérieure au triangle A P B et à D. Ainsi, nous pouvons attribuer à I les bornes assignées dans le paragraphe précédent et nous avons, qar la formule [19],

$$|f(B)| \lessgtr u\mathrm{I}\ , \qquad |f(B)| \lessgtr ukh^2\ , \qquad k = \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{7}{8}\ .$$

Si le domaine D est circulaire, $k = \dfrac{3\sqrt{3}}{8} < \dfrac{2}{3}$ .

Nous allons étendre le resultat précédent.

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le domaine D, connexe, convexe et de diamètre $h$. On suppose que $f(z)$ et ses $n-1$ premières dérivées s'annulent chacune en un point du domaine. Soit $u$ la borne supérieure du module de la dérivée $n^{\text{ième}}$ dans D. Rangeons par ordre décroissant les dérivées successives de $f$ et terminons par $f$; nous formons la suite

$$f^{(n)}\,,\quad f^{(n-1)}\,,\quad f^{(n-2)}\,,\quad f^{(n-3)}\,,\quad f^{(n-4)}\,,\quad f^{(n-5)}\,,\ \ldots$$

Ces dérivées admettent respectivement comme borne de leur module dans D le terme de même rang de la suite récurrente

$$[1] \qquad u\cdot 1\,,\quad u\cdot h\,,\quad u\cdot hk^2\,,\quad u\cdot kh^3\,,\quad uk^2h^4\,,\quad uk^2h^5\,,\ \ldots$$

où les trois premiers termes sont donnés par le calcul précédent et où chacum des suivants s'obtient, par le même calcul, en multipliant l'avant-précédent par $kh^2$.

Selon que D est quelconque où à contour circulaire, on fait

$$k = \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{7}{8} \quad \text{ou} \qquad k = \frac{3\sqrt{3}}{8} < \frac{2}{3}\ .$$

Si $u$ était nul, tous les termes de la suite [1] seraient nuls et, comme $f$ a son module borné par le dernier terme, $f$ serait identiquement nul.

12. *Théorème d'unicité de M. Ballieu.* – Ce théorème d'unicité concerne l'intégrale d'une équation linéaire. Nous apportons seulement à l'énoncé de M. Ballieu un supplément de précision. Aux évaluations près, notre démonstration est la même que la sienne.

Nous considérons d'abord l'équation différentielle linéaire homogène

$$[2] \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + \chi_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \chi_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + \chi_n y = 0 \ ,$$

dans les coefficientes $\chi_1, \chi_2, \ldots \chi_n$ sont holomorphes dans un domaine D à contour convexe. Voici le théorème: *Une solution $y = f(x)$ de l'équation qui s'annule et dont les $n-1$ premières dérivées s'annulent aussi dans le domaine* D, *sera identiquement nulle, à moins que le diamètre $h$ de* D *ne surpasse la plus petite racine positive $h$ de l'équation*

$$[3] \qquad 1 = M_1 h + M_2 k h^2 + M_3 k h^3 + M_4 k^2 h^4 + \ldots + M_n k^{\left[\frac{n}{2}\right]} h^n \ ,$$

*où* $M_1, M_2 \ldots M_n$ *sont les bornes supérieures dans* D *des modules de* $\chi_1, \chi_2, \ldots \chi_n$ *et où* $\left[\frac{n}{2}\right]$, *dernier exposant de $k$, est le plus grand entier contenu dans* $\frac{n}{2}$.

Selon que le domaine D est circulaire ou non, le coefficient $k$ reçoit l'une des valeurs $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ ou $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

La démonstration est immédiate.

Si $u = 0$, le théorème est démontré par les dernières lignes da n° précédent. Nous supposons donc $u$ différent de zèro.

Le module maximum $u$ du premier terme de l'équation [2] est atteint en un point du domaine D et par conséquent, ne peut être supérieur à la somme des modules maximés de tous les autres. Si nous multiplions par $u$ tous les termes de l'équation [3], nous obtenons au premier membre le module maximum du premier terme de l'équation [2], et dans le second, la somme des modules maximés de tous les autres. Supprimons le facteur commun $u$, le premier membre, 1, de l'équation [3] ne peut surpasser le second membre, d'où le théorème énoncé. C'est sur ce même principe que nous nous étions appuyés dans notre article cité des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* et dans un article du *Journal de Mathématiques pures et appliquées: Sur la détermination d'une intégrale par des valeurs assignées* (1929).

Sans rien changer aux hypothéses concernant le premier membre, considérons maintenant l'équation avec second membre

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \chi_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + \chi_n y = \chi \quad [4]$$

Si cette équation admet deux solutions, leur différence est une solution de l'équation [2] sans second membre. Le théorème d'unicité précédent leur est applicable et peut s'énoncer cette fois sous la forme suivante:

*Une solution de l'équation* [4] *(avec ou sans second membre) est complètement déterminée dans un domaine d'holomorphie* $\Delta$ *des coefficients, par les valeurs que prennent cette solution* $f(x)$ *et ses* $n-1$ *premières derivées en* $n$ *points qui leur sont respectivement assignés dans un domaine* D *contenu dans* $\Delta$, *convexe et de diamètre* $h$, *pourvu que* $h$ *ne surpasse pas la plus petite racine positive de l'équation* [3]. *Selon que le domaine* D *est circulaire ou non, le coefficient* $k$ *reçoit, dans cette équation, la valeur* $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ *ou la valeur* $\frac{\sqrt{3}}{2}$.