PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XI - N. 9
pag. 109-116

DEDUZIONE DEI RISULTATI DI UNA GALLERIA AERODINAMICA DA QUELLI DI UN CANALE IDRICO (*)

PIETRO TEOFILATO

SVMMARIVM. — Auctor tradit quomodo ratio, qua se gerit bidimensionalis flatus aëris in obstaculum incurrens repraesentari possit per similem aquae rationem.

Quod maximi est momenti, cum ita de aëris ratione investigari possit parvis hydraulicis machinis, vitatis magnis sumptibus quibus opus est ad aerodynamicos cuniculos instruendos.

POSIZIONE DEL PROBLEMA

§ 1. – Il problema della rappresentazione del fenomeno fluidodinamico di una corrente bidimensionale di aria in presenza di un ostacolo, mediante analogo fenomeno di una corrente di acqua, è stato già oggetto di due miei precedenti lavori (1).

L'importanza di questa rappresentazione risiede nella grande economia di potenza e di impianti che verrebbe raggiunta, allorchè, in luogo di una galleria aerodinamica a grande velocità, sia pure ultrasonora, si sperimentasse sopra un canale di acqua, a corrente sia pure ipercritica.

Se si pone l'ipotesi che nel canale siano trascurabili le accelerazioni verticali dell'acqua rispetto all'accelerazione g della gravità, si

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giuseppe Armellini il 19 luglio 1947.

(1) P. TEOFILATO, *Contributo alla rappresentazione analitica di una corrente gassosa mediante una corrente idrica*, « Atti del VI Congresso di Mecc. Appl. ». Parigi, 1946; *Monografie scientifiche del Ministero dell'Aeronautica*. 1947, Febbraio.

ottiene un'analogia scoperta dal RIABOUCHIWSKY [1] tra il comportamento dell'acqua e quello di un gas cosiddetto ipotetico, perchè inesistente in natura, in quanto il rapporto dei suoi calori specifici è eguale a 2.

L'analogia richiede che il rapporto delle altezze di acqua si muti nel rapporto delle radici quadrate delle pressioni in gas, mentre rimangono identici i rapporti tra le velocità omologhe e le rispettive velocità di ristagno nei due campi, tenuto presente che il potenziale di velocità in acqua soddisfa alla stessa equazione cui soddisfa il potenziale di velocità in gas, salvo a mutare la velocità critica locale $\sqrt{gh}$ (h altezza di acqua) nella locale velocità del suono.

L'inesistenza del gas ipotetico porta che l'analogia *quantitativa* tra acqua e gas ipotetico, divenga solo *qualitativa* tra acqua ed aria, mentre, veramente interessante, stante l'economia degli impianti idrici, sarebbe una corrispondenza quantitativa tra fenomeni in acqua e fenomeni in aria. Per questo occorreva poter passare quantitativamente dai fenomeni in gas ipotetico a quelli in aria, e la ricerca di un metodo che permettesse tale passaggio ha formato appunto l'oggetto dei miei sopra citati lavori.

Lo scopo è stato da me raggiunto esibendo una trasformazione la quale muta l'equazione del potenziale di velocità del gas ipotetico, in quella relativa all'aria, dove invece il rapporto dei calori specifici è eguale ad 1,4. Però la prolissità dei calcoli necessari per arrivare ai richiesti risultati quantitativi finali, mi ha presto sollecitato ad esaminare un caso approssimato, ove fosse possibile semplificare straordinariamente i calcoli. I profili sottili a debole incidenza si sono prestati allo scopo, e l'analogia (quantitativa) che ad essi si riferisce è stata studiata nel secondo dei due lavori accennati [2].

Tuttavia, il desiderio di svincolare lo studio dalle limitazioni imposte dalla validità dei risultati approssimati ora specificati, mi ha indotto a riprendere in esame il problema generale, e nella nota presente sono riuscito difatti ad ottenere il passaggio dai risultati quantitativi in acqua a quelli quantitativi in aria per profili ed incidenze qualsiasi.

---

(1) PREISWERK, *Anwedungen gasdynamischer Methoden auf Wasserströnungen mit freiea Oberflache*. Zusich 1938, Ediz. Leemann.

(2) P. TEOFILATO, *loc. cit.*, Appendice I.

§ 2. – L'EQUAZIONE DEL POTENZIALE DI VELOCITÀ. – L'equazione del moto stazionario [piano (xy) di un fluido compressibile dipendente da un potenziale di velocità $\varphi(x, y)$ è notoriamente]:

$$\text{[1]} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\left[1 - \frac{1}{U^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2\right] - 2\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}\,\frac{1}{U^2}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\left[1 - \frac{1}{U^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right] = 0 \;.$$

dove U è la velocità locale del suono, cioè:

$$\text{[2]} \qquad U^2 = \frac{k-1}{2}\,(\beta^2 - u^2 - v^2) \;,$$

espressa per mezzo di k, rapporto dei calori specifici, di u, v componenti di velocità secondo gli assi x ed y, di β velocità massima. La [1] è valida tanto nel campo subsonoro che in quello ultrasonoro.

Mediante la trasformazione di LEGENDRE, data dalle formole:

$$\text{[3]} \quad \varphi = ux + vy - \Phi(u, v)\,; \quad x = \frac{\partial \Phi}{\partial u}\,, \quad y = \frac{\partial \Phi}{\partial v}\,; \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,,$$

la [1] si muta in:

$$\text{[4]} \quad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}\left[1 - \frac{v^2}{\alpha^2(\beta^2 - u^2 - v^2)}\right] + 2\,\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u\,\partial v}\,\frac{uv}{\alpha^2(\beta^2 - u^2 - v^2)} + \\ &\qquad + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}\left[1 - \frac{u^2}{\alpha^2(\beta^2 - u^2 - v^2)}\right] = 0 \;, \end{aligned}$$

dove si è posto:

$$\text{[5]} \qquad \frac{k-1}{2} = \alpha^2 \;.$$

Sotto l'ipotesi del § 1, la [1] e la [2] sussistono inalterate per una corrente in acqua, purchè la U si interpreti come velocità critica $(U^2 = g \cdot h)$ dove h è il livello del liquido e si assuma $k = 2$, ossia $\alpha^2 = \frac{1}{2}$.

Inoltre si ha per le velocità massima e minima:

$$\text{[6]} \qquad V_{\max} = \beta\,; \quad V_{\min} = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \cdot \beta = \beta_0$$

dove β_0 e β sono come è noto (1) i raggi dei due circoli del piano odografo tra i quali sono comprese le epicicloidi costituenti le linee caratteristiche dell'equazione [4].

Introducendo le coordinate polari:

$$\xi^2 = u^2 + v^2 \;, \quad \eta = \text{arc tang}\,\frac{v}{u} \;, \tag{7}$$

e ponendo:

$$F^2 = \frac{\xi^2(1+\alpha^2) - \alpha^2\beta^2}{\alpha^2(\beta^2 - \xi^2)\xi^2} \tag{8}$$

si ottiene in luogo della [4]:

$$L(\Phi) \equiv \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - F^2 \frac{\partial^2}{\partial^2 \eta^2} - \xi F^2 \frac{\partial}{\partial \xi}\right] \Phi = 0 \;. \tag{9}$$

§ 3. Trasformazione del piano odografo e del profilo. – È facile verificare (2) che, posto:

$$\theta(\xi, \alpha) \equiv -\frac{\beta}{\beta_0}\,\text{arco cot}\,\frac{\beta_0}{\beta}\,\xi F + \text{arco cot}\,\xi F \;, \tag{10}$$

la trasformazione:

$$\left\{\begin{aligned} \theta(\xi, \alpha) &= \theta(\xi_0, \alpha_0) \\ \eta &= \eta_0 \end{aligned}\right. \tag{11}$$

muta il piano odografo (ξ_0, η_0) del gas (α_0), cioè del gas per cui il rapporto dei calori specifici è legato ad α_0 mediante la [5], nel piano odografo (ξ, η) del gas (α). Infatti le [11], insieme con altra equazione che non trascriviamo, trasformano l'equazione [9] avente il parametro α_0, nella medesima, ma col parametro α.

Orbene, suppongasi conosciuto il profilo nel gas α_0 e siano:

$$x_0 = \varphi_0(s_0) \;, \quad y_0 = \psi_0(s_0) \tag{12}$$

le sue equazioni parametriche nelle quali il parametro s_0 è l'arco.

(1) « Atti del Covegno 1935, Acc. d'Italia », pag. 186.

(2) Cfr. P. Teofilato, *loc. cit.*

Avremo:

$$[13] \quad \frac{dx_0}{ds_0} = \dot{\varphi}_0(s_0) = \cos \eta_0 \,, \quad \frac{dy_0}{ds_0} = \dot{\psi}_0(s_0) = \operatorname{sen} \eta_0 \,, \quad \frac{ds_0}{dt} = \xi_0 \,,$$

mentre, per il profilo trasformato di equazioni:

$$[14] \qquad x = \varphi(s) \,, \quad y = \psi(s) \,, \qquad (s = \text{arco trasformato})$$

avremo, tenuto conto della seconda delle [11]:

$$[15] \qquad \frac{dx}{ds} = \cos \eta_0 \,, \quad \frac{dy}{ds} = \operatorname{sen} \eta_0 \,, \quad \frac{ds}{dt} = \xi$$

ossia:

$$[16] \qquad \frac{dx}{ds} = \dot{\varphi}_0(s_0) \,, \quad \frac{dy}{ds} = \dot{\psi}_0(s_0) \,;$$

e da [13] e [15]:

$$[17] \qquad ds : ds_0 = \xi : \xi_0 \,.$$

Ma, dalle [11], esplicitando ξ si otterrà:

$$[18] \qquad \xi = \mathbf{\Gamma}(\xi_0, \alpha, \alpha_0) \qquad (\mathbf{\Gamma} \text{ funzione nota});$$

per cui la [17] diverrà:

$$[19] \qquad ds = \frac{\mathbf{\Gamma}}{\xi_0} \, ds_0 \,.$$

Immaginiamo per un momento di conoscere la funzione $\xi_0(s_0)$ (che determineremo nel paragrafo seguente); cioè si conosca la velocità ξ_0 in funzione dell'asse s_0, lungo il profilo del gas α_0, ed allora la [19] diverrà:

$$[20] \qquad ds = \mathbf{\Gamma}\big(\xi_0(s_0), \alpha, \alpha_0\big) \, \frac{ds_0}{\xi_0(s_0)}$$

onde dalle [16] e [20] risulterà:

$$x = \int \dot{\varphi}_0(s_0)\,\Gamma\big(\xi(s_0),\alpha,\alpha_0\big)\frac{ds_0}{\xi_0(s_0)}\ ;\quad y = \int \dot{\psi}_0(s_0)\,\Gamma\big(\xi(s_0),\alpha,\alpha_0\big)\frac{ds_0}{\xi_0(s_0)}\ ;$$

che sono appunto le equazioni del profilo trasformato per il gas (α), in funzione del parametro s_0 arco del profilo di partenza immerso nel gas (α_0).

§ 4. Ricerca di $\xi_0(s_0)$. – Lungo il profilo trasformando si può ottenere $\xi_0(s_0)$ sperimentalmente (1), ma anche mediante il calcolo teorico.

Difatti è noto che, se $\bar{\alpha}$ è l'angolo che la corrente fa, con la con la normale all'onda di urto, è $\Delta\bar{\alpha}$ eguale all'angolo di deviazione della corrente (2).

Pertanto, nel caso di urti infinitesimi e cioè di deviazioni infinitesime (come avvengono lungo un profilo nel quale la curvatura vari con continuità) sarà $d\bar{\alpha}$ niente altro che l'angolo di contingenza del profilo e perciò, se $R_0(s_0)$ indica il raggio di curvatura nel punto che corrisponde all'arco s_0, sarà:

$$d\bar{\alpha} = \frac{ds_0}{R_0(s_0)}\,,\quad \bar{\alpha} = \bar{\alpha}_0 + \int_0^{s_0}\frac{ds_0}{R_0(s_0)}\ . \tag{22}$$

D'altra parte, la nota condizione di rifrazione (4) della corrente attraverso la linea d'onda dà:

$$\frac{\tan\bar{\alpha}}{\rho} = \frac{\tan(\bar{\alpha}+\Delta\bar{\alpha})}{\rho+\Delta\rho}\ ,$$

dove ρ è la densità; quindi, per salti infinitesimi:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\bar{\alpha}}{\operatorname{sen}\bar{\alpha}\cos\bar{\alpha}} \tag{23}$$

---

(1) Tenendo conto che in gas ipotetico (α_0) e in acqua i profili sono identici e così pure sono eguali i rapporti di velocità in due coppie di punti omologhi.

(2) Cfr. Stefano Teofilato (Junior), «1° Supplemento alle Monografie Scientifiche del Ministero dell'Aeronautica», Gennaio 1947.

Se poi p è la pressione, V la velocità, allora il principio di energia e la legge adiabatica [a patto che si escludano discontinuità finite (¹)] forniscono:

$$\frac{dp}{\rho} = -d\left(\frac{V^2}{2}\right), \quad p = p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k . \qquad [24]$$

Così, dalle [22], [23], [24], eliminando p, ρ, α si ricaverà mediante semplici quadrature V, ossia ξ_0, in funzione di s_0. Si sarà ottenuta quella funzione $\xi_0(s_0)$ che occorre per effettuare le quadrature [22] le quali danno le equazioni parametriche del profilo trasformato.

Per il gas ipotetico ($k=2$), indicando con l'indice uno gli elementi relativi alla punta di prua, si ha:

$$\left(\xi_0(s_0)\right)^2 = (\xi_0^2)_1 - \frac{2}{k-1}\frac{\rho}{\rho_1} + \frac{2p_1}{k-1}\cdot\frac{\tan\left(\bar{\alpha}_1 + \int_0^{s_0}\frac{ds_0}{R(s_0)}\right)}{\tan\bar{\alpha}_1} .$$

§ 5. Calcolo delle pressioni. – Anzitutto ricordiamo la formola:

$$\frac{p}{p_0} = \left[1 + \frac{\rho_0}{p_0}\frac{k-1}{2k}(V_0^2 - V^2)\right]^{\frac{k}{k-1}} , \qquad [25]$$

dove $\rho_0 p_0 V_0$ sono densità, pressione e velocità in un dato punto P di un generico filetto fluido. Poichè d'altra parte, essendo U_0 la velocità del suono in quel punto, si ha:

$$U_0^2 = \frac{p_0 k}{\rho_0} ,$$

la formola [25], tenuta presente la [5], diventa:

$$\frac{p}{p_0} = \left[1 + \alpha^2\frac{V_0^2 - V^2}{U_0^2}\right]^{\frac{k}{(k-1)}} .$$

Se poi il punto P è un punto di ristagno (serbatoio), allora, valendosi delle formole:

$$U^2 = \alpha^2(V^2_{max} - V^2) , \quad U_0^2 = \alpha^2 V^2_{max} ,$$

(¹) Ciò accade fra l'onda di prua e quella di poppa.

e adottando l'indice s per gli elementi del serbatoio, avremo:

$$q = \frac{p}{p_s} = \left(1 - \frac{V^2}{V^2_{max}}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

ovvero, per la [18]:

$$q = \left[1 - \frac{\Gamma^2(\xi_0, \alpha, \alpha_0)}{\beta^2}\right]^{7/2}$$

e, per il principio di omogeneità:

$$q = \left[1 - \frac{\xi_0^2}{\beta^2}\,\Gamma_*^2\left(\frac{\xi_0}{\beta}, \alpha, \alpha_0\right)\right]^{7/2} .$$

Si supponga adesso che α_0 corrisponda al gas ipotetico. Dalle esperienze in acqua a quelle in gas ipotetico, si passa, a norma dell'analogia di Riabouchiwsky, mantenendo lo stesso profilo ed il rapporto $\xi_0 : \beta$ (tra velocità locale e velocità massima del gas ipotetico) eguale al rapporto analogo dell'acqua. D'altra parte, quest'ultimo, a causa del principio di energia (e in assenza di viscosità), è dato da:

$$\left(\frac{\xi_0}{\beta}\right)^2 = \frac{h_s - h}{2h_s} ,$$

dove h_s è l'altezza d'acqua di ristagno ed h l'altezza locale generica. Pertanto, essendo nell'aria $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e nel gas ipotetico $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, risulterà:

$$q = \left[1 - \frac{h_s - h}{2h_s}\,\Gamma_*^2\left(\sqrt{\frac{h_s - h}{2h_s}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]^{7/2}$$

e si otterranno così le pressioni lungo il profilo in aria, mediante il rilievo delle altezze d'acqua lungo il profilo in acqua.