



LEGGI DEL TRASPORTO SOLIDO NEI CANALI (*)

(Con una figura)

STEFANO TEOFILATO

SUMMARIVM. — Proprietatibus dimensionalibus innixus Auctor invenit formulam quam experimentis proposuerat MEYER-PETER, quaeque falso apparet componi non posse cum iis quae CONTI asseruit de solidis vehendis in fluminis alveo.

INTRODUZIONE

Lo studio delle condizioni del trasporto solido nel fondo dei corsi d'acqua è stato oggetto di numerose osservazioni dirette e successivamente di ricerche di laboratorio, che hanno dato origine ad un notevole gruppo di formole a carattere meramente empirico.

Il Du Bois, e poi il CONTI, hanno affrontato il problema dell'inquadramento del fenomeno nelle rigide leggi della meccanica, riuscendo a dare formole nelle quali, però, i numerosi parametri, che si vengono ad introdurre, non sempre esplicitamente figurano.

Più tardi il MEYER-PETER ha proposto una formola empirica, alla quale però sono state volte critiche per il suo carattere semplicista. In questo lavoro, dopo un rapido sguardo alle varie trattazioni del problema del trasporto solido, ne viene affrontato lo studio con metodi puramente dimensionali ed, in tal modo si determina, per via teorica, una formola assai simile a quella proposta dal MEYER-PETER e si riesce ad ovviare alle giuste critiche a quella mosse.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giuseppe Arnellini il 10 febbraio 1947.

Viene inoltre determinata una legge di trasporto solido in seconda approssimazione; da ultimo segue un confronto numerico tra la legge trovata ed i risultati sperimentali di BITTERICH.

Già in prima approssimazione la formola che si è qui determinata fornisce nel suo impiego risultati soddisfacenti. Essa richiede fondamentalmente la conoscenza della portata liquida alla quale si ha l'inizio del movimento dei grani del materiale di fondo, dei quali si dovrà supporre una dimensione media unica, nonché della forma della sezione dell'alveo e la pendenza di questo.

§ 1. LEGGI DI TRASPORTO SOLIDO. - Daremo anzitutto un breve cenno della legge stabilita dal Du Bois. Egli considera l'equilibrio tra la forza con la quale l'acqua agisce nei confronti dello strato solido costituente il fondo, di spessore s , e massa specifica ρ_s . Detto f il coefficiente di attrito tra lo strato solido costituito da materiale che può essere assoggettato a movimento di trasporto, ed

$$F = \rho_a g \cdot H \cdot i$$

l'azione dell'acqua,

$$P = (\rho_s - \rho_a) s g$$

il peso in immersione del materiale solido, il rapporto tra F e P dovrà essere, per l'equilibrio dello strato, minore del coefficiente f di attrito: cioè:

$$\frac{F}{P} = \frac{\rho_a H \cdot i}{(\rho_s - \rho_a) s} \leq f$$

dalla quale si trae, che, se:

$$s \geq \frac{\rho_a H \cdot i}{(\rho_s - \rho_a) f}$$

lo strato è in movimento.

In tal caso si suppone di aver diviso lo strato di fondo in tanti straterelli di dimensione d eguale a quella media dei grani, la relazione:

$$n \cdot d = \frac{\rho_a H \cdot i}{(\rho_s - \rho_a) f}$$

dà l'altezza dello strato solido in movimento.

Considerando poi una distribuzione di velocità, in seno allo strato solido in movimento, proporzionale all'altezza dello straterello di spessore d , indicando poi con F_0 la forza di gravità esercitata dall'acqua sul primo straterello, con F quella esercitata sullo straterello ennesimo, con u_s la velocità del primo straterello in movimento a contatto con l'alveo fisso, si ha l'espressione della portata solida della portata solida specifica (cioè per l'unità di larghezza del corso d'acqua):

$$[1] \quad q_s = \frac{u_s F (F - F_0)}{2 \cdot d (\rho_s - \rho_a)^2 g^2 f^2} = \eta F (F - F_0)$$

Nella quale espressione, per F_0 circa zero, ciò che potrebbe verificarsi per strati composti da materiale molto fine ed incoerente, la [1] porta alla conclusione che la portata solida è proporzionale al quadrato della forza di trascinamento che si esercita sul letto fisso del corso d'acqua.

Altre formole, cui SHULTS e CORFITZEN hanno dato la denominazione di « formole di trascinamento », proposte per rappresentare il trasporto solido, si basano sulla relazione che passa tra la forza di trascinamento e la dimensione dei grani del materiale trasportato.

In esse le caratteristiche fisiche del materiale mosso figurano espresse in termini della forza di trascinamento, e le relazioni hanno soltanto carattere empirico.

L'Istituto Federale Svizzero di Tecnologia, attraverso le sue ricerche ha rilevato, invece, l'inesistenza di un legame tra forza di trascinamento e le dimensioni del grano del materiale trasportato: per un determinato valore della forza di trascinamento, ha trovato che la dimensione del materiale trasportato dipende dall'altezza dell'acqua della corrente.

In generale, poi, poco si è chiarito intorno alla forza di trascinamento critica, cioè per la quale si ha l'inizio del movimento di grani

di determinata dimensione, specie per il materiale finemente diviso, invece per materiale più grosso si è data una formola:

$$F_0 = bD^m$$

dove b è una costante dipendente dalle caratteristiche fisiche del materiale solido, D la dimensione del grano del materiale solido, m è un esponente cui SCHOKLITSCH attribuisce il valore $\frac{3}{2}$, KEY e KRAMER lo fanno uguale ad 1, e lo *U. S. Waterway Experiments Station* ne dà il valore $\frac{1}{2}$. Si posseggono anche dati ricavati dalla osservazione delle forze di trascinamento naturali, forniti dal *Neurnberg Kulturamt*.

Altre formule ancora permettono la determinazione della portata solida del letto di un corso d'acqua e derivano dall'esame del comportamento del materiale di fondo medesimo sotto l'influenza di differenti portate liquide e differenti pendenze. Queste formole sono state indicate, dagli autori sopra citati, SHULITS e CORFITZEN, con la denominazione di « formole per il materiale di fondo ».

Si indica al solito con q_s la portata solida specifica, con q quella liquida e con q_0 quella liquida « critica » cioè corrispondente a quella per la quale si ha l'inizio del movimento del materiale di fondo.

SCHOKLITSCH, impiegando dati sperimentali di GILBERT, propone la formola:

$$q_s = a(q - q_0) i^{3/2} d^{-1/2}$$

dove i è la pendenza della linea di energia, d il diametro del grano del materiale solido di cui si compone il fondo, a è una costante.

Lo stesso autore giunge ad una formola analoga con considerazioni di carattere esclusivamente teorico.

La velocità del materiale solido può ritenersi proporzionale alla velocità dell'acqua della corrente ed esprimersi con

$$c_1 U$$

Allora la potenza spesa per l'aumento della forza di trascinamento, dal valore che corrisponde alle condizioni di inizio del movimento o « critiche », a quello che corrisponde alle condizioni relative alla corrente in esame, è:

$$H = \rho_a g c_1 U i (A - A_0) = \rho_a g c_1 i (q - q_0)$$

nella quale A è l'area di passaggio dell'acqua nelle condizioni in esame, per metro di larghezza della corrente, A_0 è l'area di passaggio dell'acqua nelle condizioni di inizio del movimento del materiale solido. Ritenendo la portata di materiale solido proporzionale alla potenza spesa per l'incremento della forza di trascinamento, si otterrà allora la seguente espressione, in cui nel fattore χ sono contenuti tutti i fattori di proporzionalità e fattori numerici:

$$[2] \quad q_s = \chi i (q - q_0)$$

Gli Autori MEYER-PETER, FAVRE, EINSTEIN, in seguito ad esperienze compiute presso il laboratorio Zurigo, hanno proposta la formola:

$$[3] \quad q^{2/3} \frac{i}{d} = 17 + \frac{0,4 q_s^{2/3}}{d}$$

che, quando sia linearizzata, risulta del tipo della precedente dovuto a SCHOKLITSCH. Infatti essa può essere posta nella forma

$$y = (a + bx^{2/3})^{3/2},$$

facendo opportune ed evidenti sostituzioni. Sviluppandola in serie di MAC LAURIN e fermandosi al primo elemento:

$$q_s = \left(\frac{i}{0,4} q_0^{2/3} - \frac{17d}{0,4} \right)^{1/2} \cdot \frac{i}{0,4 q_0^{1/3}} (q - q_0)$$

che corrisponde esattamente alla [2].

Più recentemente EINSTEIN afferma che è necessario riferire il fenomeno di trasporto, non più ai termini del flusso della corrente d'acqua, bensì alle fluttuazioni di velocità nelle vicinanze del fondo. Di qui un esame del movimento del materiale di trasporto ha dato motivo, a detto Autore, di concludere che esso si muove sul letto fisso del corso d'acqua scambiando continuamente le particelle solide che, perciò, alternano tratti di movimento a tratti di sosta.

§ 2. CRITICHE AD UNA FORMOLA. - La formola data da MEYER-PETER, FAVRE, EINSTEIN si è prestata ad alcune obiezioni. Infatti, introdotto il rapporto finito $R = \frac{q_s}{q}$ dalla [3] si trae la:

$$[4] \quad q = f(d, R, i)$$

in cui è omessa la esplicitazione nelle costanti $a = 17$, $b = 0,4$ perchè per queste si sottintendono i particolari valori assunti nella [3]. Siano ora U_a , la velocità media della corrente di sezione trasversale A e larghezza L , p il contorno bagnato, r il raggio idraulico, allora la portata specifica liquida, così come è definita dal MEYER è:

$$q = \rho_a g \frac{A}{L} U_a = \rho_a g \frac{A p}{p L} U_a = \rho_a g r U_a$$

ammettendo eguale all'unità il rapporto $\frac{p}{L}$, ciò che si verifica molto approssimativamente per i grandi corsi d'acqua.

Dell'ultima espressione della portata liquida si vale l'ARREDI, infatti da essa si ricava facilmente la U_a espressa in funzione anche della [4]:

$$[5] \quad U_a = \frac{f(d, R, i)}{\rho_a g r} ;$$

da essa poi, esplicitando il legame f , si ricaverebbe essere la velocità della corrente inversamente proporzionale al raggio idraulico:

$$[6] \quad U_a = \frac{1}{\rho_a g \cdot r} \left(\frac{17 d}{i - 0,4 R^{2/3}} \right)^{3/2} ,$$

Si ricaverebbe quindi un risultato che è in contraddizione con quello ormai classico del KENNEDY, secondo il quale è invece:

$$U_a = \text{cost } r^{1/2} .$$

Supposto poi nullo il trasporto solido, cioè fatto nella [6] $R = 0$, si avrebbe:

$$[7] \quad U_a = \frac{1}{\rho_a g \cdot r} \left(\frac{17 d}{i} \right)^{3/2}$$

per la quale crescerebbe la velocità di equilibrio col diminuire di r ed i , e ciò è contrario al canone degli idraulici ed alla osservazione generica di FORTIER e SCOBEEY.

Orbene ad ovviare a queste giuste critiche, basterà, come si vedrà nella presente nota, ravvisare nei coefficienti a e b della [3] non già il carattere di una costanza, ma quello di un'opportuna variabilità, in funzione di vari parametri che effettivamente entrano nella questione.

Anzitutto si osserva che se invece della [3] si assumesse una legge affatto generale:

$$[8] \quad G(q_s, q, d, i) = 0$$

dove G è simbolo di una qualsiasi funzione, allora da quest'ultima, eliminando q_s con l'introduzione del rapporto R , ricavando poi q ed infine la velocità U , ossia ripetendo passo passo il procedimento sopra eseguito nei riguardi della [3] si ricaverebbe ancora la [5] salvo che il simbolo f ora avrebbe un carattere affatto generale. Allora alla [5] nella quale f è funzione arbitraria, si potrebbe muovere almeno la prima delle obiezioni precedentemente avanzate contro il caso particolare specificato, dimostrando così l'incompatibilità di qualsiasi legge del tipo [8] con quella di KENNEDY.

Questa conclusione induce quindi ad intravedere che tutto dipende dal modo nel quale si interpreta la costanza dei coefficienti a e b .

Forse, limitatamente alle esperienze che hanno servito di base per impiantare la [3] (esperienze le cui modalità non sono completamente note), può essere plausibile la costanza di a e b , ed inoltre potrà anche ritenersi fuori campo il caso limite di $R=0$, tanto da non essere suscettibile di essere inquadrato nei risultati di quelle esperienze e quindi di essere chiamato in causa contro di esso.

§ 3. COSTRUZIONE DI UNA LEGGE DELLE PORTATE. — In base agli indizi forniti dalle riflessioni che precedentemente abbiamo fatte si palesa la necessità di riprendere la questione nei suoi fondamenti, ciò che si farà nella presente nota alla luce dell'analisi dimensionale e dei suggerimenti che porgono i risultati sperimentali da tempo acquisiti.

Sembra lecito presumere che la q_s , pensata come funzione della q , ammetta una derivata finita, non nulla, per cui possa scriversi:

$$dq_s = k dq ,$$

dove k è un coefficiente adimensionale il quale entro limiti sufficientemente ristretti si può ritenere costante, ma in un più vasto campo invece dipende da q_s e q e da altri parametri ancora. La dipendenza di k dalle due portate, solida e liquida, e da altri parametri ancora

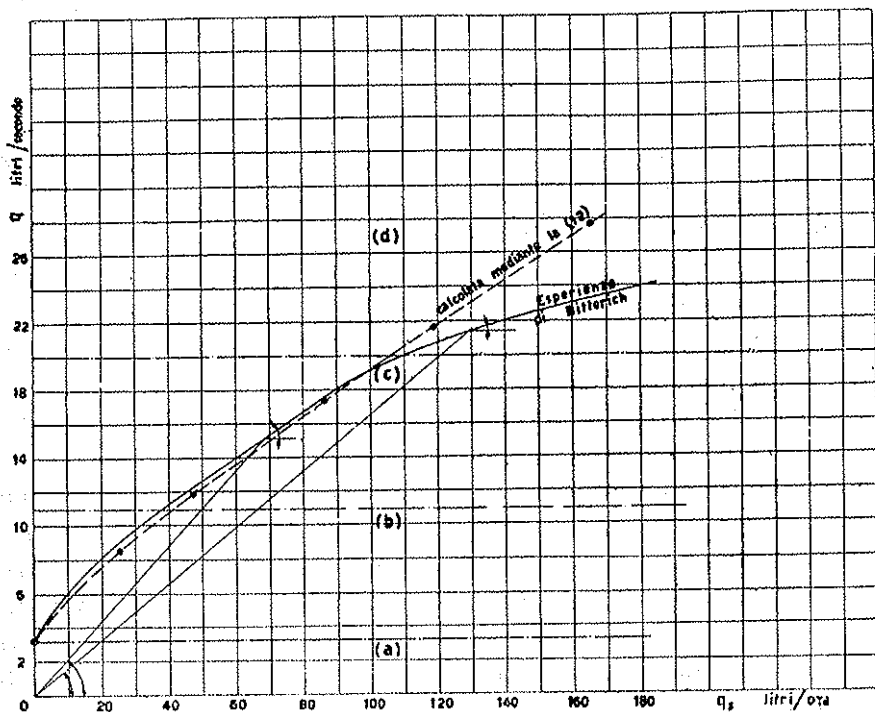


FIG. 1.

non contenenti il tempo, deve estrinsecarsi necessariamente attraverso il rapporto R , così da potersi scrivere:

$$[9] \quad dq_s = (\alpha + \beta R^m) dq .$$

In proposito si può accennare alle osservazioni compiute da BITTERICH dell'Istituto di Karlsruhe, e riportate dal Wittmann. Il BITTERICH ha compiuto notevoli osservazioni sopra il moto del materiale solido in un canale sperimentale rettilineo, lungo 35 metri, impiegando come materiale di trasporto polvere di carbon fossile. Egli a conclusione delle sue esperienze, sostiene che il fenomeno del trasporto solido

possa esprimersi come legge lineare, tra la portata liquida e la portata solida, la quale, per quanto concerne il coefficiente direttivo, varia a seconda di determinati intervalli della portata liquida per i quali è anche diverso il comportamento dello stesso materiale solido. Di questi intervalli Egli distingue:

- a) intervallo di portate liquide per il quale non si verifica alcun movimento di materiale di fondo;
- b) intervallo nel quale si ha l'inizio del movimento;
- c) intervallo nel quale si ha il movimento generale del fondo;
- d) intervallo nel quale le particelle di materiale solido passano a muoversi in sospensione in seno alla corrente.

Dall'esame del diagramma che Egli fornisce, risulta poi che la inclinazione della tangente al diagramma medio, nel quale le ascisse sono le q_s e le ordinate le q , cioè $\frac{dq}{dq_s}$, rimane costante oppure diminuisce col diminuire dell'angolo (con l'asse delle ascisse) che fa il raggio condotto dall'origine ai punti del diagramma aventi ascisse crescenti: salvo un piccolo tratto iniziale l'angolo è dato da $\arctang\left(\frac{q}{q_s}\right)$. Ciò significa che la derivata $\frac{dq}{dq_s}$ aumenta con l'aumentare di R e si è perciò indotti ad assumere l'esponente m positivo.

D'altra parte se si immette un incremento dq di acqua aumenterà il contorno bagnato e simultaneamente l'altezza d'acqua sul fondo.

Ma l'incremento di contorno prima scoperto ed ora bagnato porta ad un incremento della portata solida, mentre l'aumento di altezza fa crescere il carico e con esso la forza di trascinamento sul fondo. Sono due cause cospiranti allo stesso effetto di incrementare q_s di dq_s , si può dunque ritenere approssimativamente la proporzionalità tra dq_s ed una combinazione lineare di dp e dh .

Per contro l'aumento dq di portata liquida è certamente proporzionale all'incremento dh dell'altezza d'acqua, allora la derivata $\frac{dq_s}{dq}$ è un rapporto di due termini ciascuno dipendente da una lunghezza al primo grado, mentre i termini di R , del quale la detta derivata è funzione, dipendono da lunghezze al terzo grado.

Ne verrà di conseguenza che il rapporto R dovrà necessariamente figurare nella [9] al grado $m = \frac{1}{3}$.

A complemento della argomentazione suesposta cade opportuna la riflessione seguente. Si consideri, per fissare le idee, nel corso d'acqua una fetta di un decimetro di larghezza e cento di altezza, e si supponga che per ogni decimetro cubo vi siano in media mille grani (tutti delle stesse dimensioni). Se viene immessa una quantità d'acqua Δq , senza grani, la quale faccia salire di un decimetro, cioè di un centesimo, la precedente altezza, a causa dell'aumento di carico sul fondo sarà asportata in più una quantità $\Delta' q_s$ di materiale solido. Se invece si immagina che q_s sia otto volte più grande, cioè 2^3 volte, in modo che in un decimetro cubo vi siano ottomila grani, anzichè mille, allora su ogni spigolo del cubo vi sarà adesso un numero doppio di grani, rispetto al caso precedente ed è quindi da presumere che un incremento $\Delta'' q_s$ di materiale solido, provocato dall'incremento di portata liquida Δq risulti ora doppio rispetto a $\Delta' q_s$.

In quanto ora si è detto, non è escluso che anche il coefficiente β abbia a dipendere dalla forma del profilo della sezione e quindi dal contorno p , ed eventualmente dalla pendenza i . Il coefficiente β va considerato costante entro un certo campo, ma con l'estendersi di questo può non più conservarsi tale e dipendere, invece, sensibilmente dai parametri della questione, così come ad esempio si verifica per il coefficiente di resistenza quadratica nell'avanzamento in un mezzo fluido, che effettivamente viene a dipendere dal numero di REYNOLDS. La dipendenza di β dal contorno bagnato verrà richiamata in seguito. Infine, poichè l'incremento di portata solida è da ritenersi proporzionale a $\text{sen } i$, e quindi ad i , si porrà:

$$[10] \quad dq_s = (\alpha + \beta R^{1/3}) i dq$$

Riterremo dapprima nullo il parametro α , per modo che si avrà adesso la:

$$\frac{(dq : dq_s)^3}{q : q_s} = \beta i ,$$

l'integrazione della quale ci porterà ad una legge di trasporto solido in prima approssimazione, mentre in seguito verrà anche considerata

l'equazione completa [10], ciò che darà luogo alla legge di trasporto solido in seconda approssimazione.

L'integrazione della [10], fattovi $\alpha = 0$, fornisce:

$$[11] \quad q_s^{2/3} = \beta i q^{2/3} + \text{cost.}$$

Indicando allora con q_0 la portata liquida critica, cioè quella cui corrisponde l'equilibrio dei grani di dimensione prefissata d , si potrà esprimere la costante additiva in funzione di questa q_0 , giungendo così alla:

$$[12] \quad q_s^{2/3} = \beta i (q^{2/3} + q_0^{2/3})$$

nella quale, per essere il minuendo rappresentato da $\beta i q_0^{2/3}$, deve risultare a norma della definizione di R data in precedenza:

$$\beta i > R^{2/3}$$

diseguaglianza che si richiamerà più oltre e che si avrebbe analogamente tra i ed R , qualora l'esponente di R nella [10] fosse assunto in modo generico, sempre però avendo presupposto i positivo.

§ 4. STUDIO DELLA PORTATA CRITICA E CONFRONTI SPERIMENTALI. — Se per portata critica si assume, come del resto fanno diversi autori, la portata per unità di contorno bagnato, allora, poichè essa è la minima portata che riesce a spostare i grani di materiale solido di una determinata dimensione d , dipenderà a parità di velocità critica (velocità corrispondente alla portata critica in una determinata sezione) oltre che dal raggio idraulico r , anche dalla forma del profilo. In questo si è d'accordo con lo SHIELDS, il quale ritiene che l'introduzione del raggio idraulico sia un procedimento affatto arbitrario, che non tiene per nulla conto della forma del profilo. Come ulteriore parametro geometrico, che, almeno per i canali nei quali l'altezza d'acqua è piccola rispetto alla larghezza, individua la sezione con molta approssimazione, si assumerà il perimetro bagnato p della sezione stessa.

Una espressione della portata critica specifica si otterrà moltiplicando la corrispondente velocità critica V_0 per un fattore di dimen-

sione uno rispetto alle lunghezze e costruito con r e p . Si presentano perciò, per ora, le due forme parimenti accettabili:

$$[14] \quad q_{01} = \rho_a g V_0 \left(\frac{r^2}{p} \right)$$

oppure:

$$[14 \text{ bis}] \quad q_{02} = \rho_a g V_0 \left(\frac{p^2}{r} \right).$$

Si prenda in esame il caso di un canale a sezione rettangolare di larghezza L ed altezza d'acqua H : il perimetro bagnato ed il raggio idraulico risulteranno rispettivamente:

$$p = 2H + L \quad r = L \cdot H : (2H + L)$$

e, per i casi reali, per i quali si può trascurare l'altezza rispetto alla larghezza, si potrà scrivere:

$$p = L_+ \quad r = H_+$$

che introdotte nella [14] e [14 bis], danno:

$$q_{01} = \rho_a g V_0 H_+^2 : L_+$$

$$q_{02} = \rho_a g V_0 L_+^2 : H_+.$$

Ora la portata, come pure la portata specifica, quando L_+ sia scelto, poichè si intende far riferimento ad una determinata sezione del canale, sono grandezze crescenti col crescere dell'altezza d'acqua H_+ , quindi la scelta tra q_{01} e q_{02} cade evidentemente sulla prima, cioè sulla espressione [14], nella quale si dovrà sottindere una costante di proporzionalità, che si indica con γ .

Per giustificare ulteriormente la [14] occorrerà riferirsi ed esperienze che permettano la determinazione del fattore di proporzionalità del quale dovrà risultare l'invarianza rispetto agli altri vari parametri della questione.

A tal fine si sono dapprima utilizzati i dati sperimentali ricavati da INDRI col precipuo scopo di determinare la forza di trascinamento e poi le esperienze di MEYER-PETER.

L'INDRI ha esposto i risultati delle sue esperienze in numerose tabelle ricche di dati dai quali si hanno le forze di trascinamento corrispondenti a varie portate e pendenze, fino a raggiungere la portata critica. Egli compie esperienze su miscele di grani, anzichè su grani di unica dimensione, e definisce queste miscele a mezzo del « grado di uniformità ».

È stato così possibile trarre i dati riguardanti le portate critiche misurate, i raggi idraulici, le altezze d'acqua, i perimetri bagnati, e le velocità medie dell'acqua: questi si sono introdotti nel secondo membro della [14]. La q_{10} così ottenuta e quella q_0 , invece misurata sperimentalmente, differiscono tra loro (la q_0 è ottenuta facendo il rapporto tra portata totale misurata e perimetro bagnato della sezione) e si è allora potuto procedere alla determinazione del fattore di proporzionalità preannunciato γ (appunto facendo il rapporto $q_{01} : q_0$).

D'altra parte la portata critica sperimentale si può anche esprimere:

$$q_0 = \frac{Q_0}{p} = \rho_a g V_0 \left(\frac{A}{p} \right) = \rho_a g V_0 r$$

mentre la [14] da:

$$q_{01} = \rho_a g V_0 \left(\frac{r^2}{p} \right)$$

ed il rapporto:

$$[15] \quad \frac{q_{01}}{q_0} = \frac{r}{p} = \gamma .$$

La media dei rapporti tra la portata calcolata dalla [14] e quella misurata sperimentalmente nelle corrispondenti condizioni è risultata eguale a 0,1175 per tutte le esperienze condotte in circostanze « critiche » dall'INDRI, d'altra parte la media dei rapporti $\frac{r}{p}$ nelle stesse esperienze è precisamente eguale a 0,1172. Risulta perciò confermata la [15], cioè la coincidenza del fattore di proporzionalità γ con il fattore di forma della sezione, relativo a condizioni critiche, cioè all'inizio del trasporto del materiale solido di prefissata dimensione d , almeno nel campo delle esperienze citate; esso dipende soltanto dal rapporto di due lunghezze caratteristiche della sezione, si manterrà perciò invariato.

riato per sezioni geometricamente simili, non dipenderà nè dalla pendenza, nè dalla portata.

Risultati concordanti coi precedenti si ottengono dai dati sperimentali del MEYER-PETER, costituiti da velocità e dall'altezza d'acqua, se opportunamente interpretati. Dette esperienze riguardano la determinazione della forza critica di trascinamento attraverso: 1° - la determinazione dei valori critici della velocità media per ciascuna profondità d'acqua, per la quale avviene una modificazione del fondo; 2° - la misurazione dell'entità del trasporto di fondo; 3° - la determinazione della pendenza idraulica per ciascuna altezza d'acqua e velocità, nonché della pendenza della linea di energia (rendendo così possibile il calcolo della forza di trascinamento).

Allo scopo della riprova sperimentale della [14] si sono scelte le esperienze condotte su grandezze di grani affatto diversi da quelle usate dall'INDRI e con miscela così formata:

0,00 a 0,01 mm.	il 88 %
0,01 » 0,05 »	» 80 %
0,05 » 0,10 »	» 17 %
0,10 » 2,00 »	» 20 %

La tabella che appresso si riporta ha richiesto da parte nostra una certa elaborazione, non trovando nei dati riportati dal MEYER-PETER, esplicitamente indicate le condizioni « critiche » del trascinamento del materiale di fondo.

La tav. 21 (Fasc. 31°, *Mitteilungen des Amtes für Wasserwirtschaft*) mostra i profili longitudinali del fondo sotto differenti altezze di acqua e velocità medie; abbiamo scelto allora le sezioni per le quali, in seguito al movimento di fondo, l'altezza relativa al medesimo non fosse mutata, cioè nelle quali il materiale solido si mantiene in equilibrio, mentre esistevano sezioni immediatamente prossime, a valle, le quali erano assoggettate a trasporto di materiale solido, ma in misura irrilevante. In altri termini abbiamo assunte queste sezioni alla stregua di quelle per le quali i corrispondenti valori della portata, velocità, pendenza, ed altezza d'acqua, si potessero ritenere molto prossimi a quelli critici.

NB. - *In testa alla tabella si riporta l'equivalenza di simboli tra quelli adottati nella presente nota e quelli dell'Op. cit.*

$V_0=V_m$	$H=H_m$	i	$q_0=V_m(H_m \cdot B)$	$p=B+2H_m$	$r=\frac{H_m B}{B+2H_m}$	A	$\gamma=\frac{r}{p}$
0,340	0,380	0,0001	0,2651	2,780	0,2810	0,780	0,1012
0,414	0,388	0,0002	0,8210	2,776	0,2705	0,776	0,1009
0,509	0,398	0,0026	0,4000	2,786	0,2831	0,786	0,1282
0,713	0,974	0,0012	0,3880	3,948	0,4938	1,948	0,1250
0,618	0,967	0,0038	0,1940	3,934	0,4819	1,934	0,1251
0,928	0,958	0,0048	1,7780	3,916	0,4895	1,916	0,1253

Dalla quale si ottiene un valore medio di $\gamma=0,1176$, molto prossimo a quello che abbiamo ottenuto impiegando le analoghe esperienze di INDRÌ. Dopo questo ulteriore confronto sperimentale si può dunque affermare che il fattore di proporzionalità da introdurre nella [14] affinché essa esprima numericamente la vera portata critica è una costante che ha molto verosimilmente il valore:

$$\frac{1}{0,1174} = 8,5188.$$

§ 5. LEGGE DI TRASPORTO SOLIDO IN PRIMA APPROSSIMAZIONE. - Quanto si è detto sopra sembra ormai sufficiente per dare solido fondamento teorico e sperimentale della [14].

Si è già accennato alla dipendenza della V_0 da altri parametri del problema, si tratta ora di procedere all'esame di questo legame.

A tal fine si osserva che per muovere il grano di peso P , occorre vincere la forza di attrito espressa dal prodotto $f \cdot P$, essendo f il coefficiente di attrito. Questa resistenza al moto è in parte vinta dall'azione di gravità, nella misura $P \cdot \text{seni}$, ovvero $P \cdot i$, ed in parte dall'azione dell'acqua. Per valutare quest'ultima si ricorda che il flusso della quantità di moto entrante attraverso una superficie di controllo S_0 , interamente costituita da particelle liquide e nella quale sia contenuto un solido totalmente limitato dalla superficie S_1 (contenuta nella S_0), eguaglia la somma delle pressioni sulla superficie di controllo e delle pressioni sul solido. Allora scegliendo come superficie di controllo un parallelepipedo con due facce parallele alla direzione della corrente, due altre normali a questa e due altre che possono essere fatte coin-

cidere con il pelo liquido e con il fondo, e proiettando i vettori in giuoco nella direzione della corrente, si otterrà un'equazione con vari termini dei quali uno sarà $P \cdot i$ ed un'altro sarà:

$$\rho_a V_0^2 \cdot p \cdot r$$

esprime il flusso di quantità di moto nella sezione a monte, intendendosi per V_0 la velocità critica media delle analoghe velocità su tutti i punti della sezione di passaggio. Ne consegue che, ai fini dimensionali, si potranno eguagliare i detti termini, curando di non omettere il fattore i , da cui ovviamente V_0 dipende; ed intendendo dunque l'equazione seguente come semplice espressione dimensionale, ma non quantitativa:

$$P \cdot i = \rho_a V_0^2 \cdot p \cdot r$$

di qui, osservando che d^3 è in media il volume del grano, ρ_s la sua massa specifica, per modo che è:

$$P = (\rho_s - \rho_a) d^3 \cdot g$$

si ricava:

$$V_0^2 = \frac{\rho_s - \rho_a}{\rho_a} i \cdot g \cdot d^3 \cdot \frac{1}{p \cdot r}$$

e tenendo conto della [14]:

$$q_0 = \rho_a (\rho_s - \rho_a) i (g \cdot d \cdot r \cdot p^{-1})^{3/4}$$

e sostituendo questa espressione di q_0 nella [12] si ha, infine:

$$[16] \quad \frac{i q^{2/3}}{d} = a + b \frac{q_s^{2/3}}{d}$$

dove per semplicità si è posto:

$$a = \rho_a (\rho_s - \rho_a)^{1/3} \frac{r g i^{4/3}}{p}$$

$$b = \frac{1}{\beta}$$

Ovviamente queste espressioni di a e b sono a carattere esclusivamente dimensionale e non quantitativo.

Si è così ritrovata la formola adottata in via sperimentale dagli autori MEYER, FAVRE, EINSTEIN, solo attraverso un esame dimensionale del problema e nello stesso tempo si è messa in evidenza la dipendenza dei coefficienti a e b , che in quella figurano, dai vari parametri del problema, come si era preannunciato.

Oltre al significativo confronto tra la [16] e la [3] si possono riscontrare altre concordanze, assai notevoli.

Dalla [16], tenuta presente l'espressione di $R = \frac{q_s}{q}$, si ricava:

$$q = i^2 \left(\frac{i \rho_a (\rho_s - \rho_a)^{4/3}}{\beta i - R^{2/3}} g r d \frac{\beta}{p} \right)^{3/2}$$

nella quale il denominatore deve soddisfare alla condizione [13].

Si ha poi, tenendo conto della [5]:

$$[17] \quad U = \frac{i^2}{\rho_a} \left\{ \rho_a (\rho_s - \rho_a) r g \left(\frac{\beta d}{p (\beta i - R^{2/3})} \right)^3 \right\}^{1/2}$$

Dunque U risulta proporzionale ad $r^{1/2}$ come richiedono le formole di CHEZY e KENNEDI, inoltre per R piccolo rispetto al prodotto $(\beta \cdot i)^{3/2}$, cioè in prossimità del caso limite $R = 0$, si ha anche U proporzionale ad $i^{1/2}$ d'accordo con la stessa formola di CHEZY.

Sostituendo infine la espressione della velocità secondo la formola di CHEZY:

$$U = C (r \cdot i)^{1/2}$$

nella [17] e ricavandone il rapporto:

$$[18] \quad \frac{R^{2/3}}{\beta i} = 1 - \frac{d}{p} \left(\frac{\rho_a (\rho_s - \rho_a) g}{(C \cdot \rho_a)^2} \right)^{1/3}$$

Dall'esame di questa relazione è possibile enunciare i risultati già ottenuti dal CONTI e riguardanti « i corsi d'acqua dritti, a regime uniforme, con trasporto di materiale solido omogeneo di unica granu-

lazione, più pesante dell'acqua stessa e con alveo almeno parzialmente formato di tale materiale»: e cioè:

La pendenza i , a parità degli altri termini, è rispettivamente tanto più grande quanto più grandi sono R e d : quindi tanto minore è la portata d'acqua q (tenuto fermo q_s , che figura al numeratore di R).

Il CONTRI aggiunge poi che i e p crescono insieme: orbene questo risultato può solo apparentemente essere contraddetto dalla [18]: piuttosto esso conferma il ragionamento che si è fatto nell'ipotesi già avanzata che anche β abbia a dipendere da p .

Dalla [18] poi si ottiene la dimensione dei grani, facendovi $R=0$, che si trovano in condizioni di equilibrio con la corrente:

$$[19] \quad d = \left(\frac{C^2 \rho_a}{(\rho_s - \rho_a)g} \right)^{1/3}$$

salvo, ben inteso un coefficiente adimensionale, a norma della osservazione fatta circa a e b a proposito della [16].

Inoltre vogliamo qui rilevare come la [16] ha i termini che conservano carattere invariantivo rispetto alla similitudine di FROUDE che così bene si presta ad esperienze idrauliche in scala; la stessa invarianza si ha nei riguardi della similitudine di REYNOLDS (a parità di sostanze in giuoco, $\rho_s = \text{cost.}$) previa moltiplicazione dei termini della [16] per d .

§ 6. FORMOLA DELLA PORTATA SOLIDA IN SECONDA APPROSSIMAZIONE. - Si è visto come l'aver considerato nullo il parametro α nella [9] abbia portato alla determinazione della legge di trasporto enunciata dalla [16], ora vogliamo invece considerare l'equazione [9] nella sua forma completa.

Dapprima rileviamo come l'aver supposto nullo α porta alla incongruenza che consiste nella impossibilità di rilevare una certa portata solida laddove questa non preesista ($dq_s = 0$ per $q_s = 0$). Perciò lo studio della seconda approssimazione si richiede specie se si vuol procedere allo studio delle portate vicine a quella per la quale si ha l'inizio del movimento del materiale solido.

Per semplicità di simboli si ponga:

$$A = i \cdot \alpha ; \quad B = i \cdot \beta ; \quad \omega = q ; \quad y = q_s ,$$

per modo che la [9] si potrà scrivere:

$$\frac{dy}{dx} = A + B \left(\frac{y}{x} \right)^{1/3}$$

che è il tipo delle equazioni omogenee. Posto $y = xZ^3$, si ottiene:

$$[20] \quad \frac{1}{3} \log x = \text{cost} + \int \frac{Z^3}{A + BZ + Z^3} dZ$$

dove la funzione integranda è una funzione razionale, la cui integrazione porta alla

$$[21] \quad \frac{1}{3} \log x \Big|_{x_0}^{\infty} = \frac{-Z_1}{2} \int_0^Z \left\{ \frac{1}{(Z - Z_1)(Z_1 - Z_3)} + \frac{1}{(Z + Z_1)(Z_1 + Z_3)} \right\} dZ$$

nella quale Z_1 e Z_3 sono radici della equazione

$$Z^3 - BZ - A = 0$$

ottenuta annullando il denominatore della funzione integranda, ed hanno il valore, rispettivamente:

$$Z_1 = B^{1/3} + \left(\frac{A}{2B} \right)$$

$$Z_3 = \frac{-A}{B}$$

la radice V_0 risulta eguale in valore assoluto alla Z_1 ma di segno contrario. Eseguendo infine l'integrazione a secondo membro della [21] e operando le sostituzioni di simboli in precedenza indicati si giunge alla seguente espressione:

$$[22] \quad \left(\frac{q}{q_0} \right)^{2/3} = \left[1 - \frac{R^{1/3}}{Z_1} \right]^{-Z_1/(Z_1 - Z_3)} \cdot \left(1 + \frac{R^{1/3}}{Z_1} \right)^{-Z_1/(Z_1 + Z_3)}$$

che verrà denominata come legge di trasporto solido in seconda approssimazione. Per un confronto a carattere numerico della legge di trasporto solido da noi determinata (formole [12] e [16] in prima approssimazione e [22] in seconda approssimazione) desumiamo dal dia-

gramma sperimentale di BITTERICH il valore della portata critica determinato nelle sue esperienze:

$$q_0 = 3,2 \text{ litri/sec}$$

e prendiamo nella [12]:

$$\beta i = \frac{1}{0,231}$$

si ottiene dunque:

$$[23] \quad q^{2/3} = 2,171 + 0,231 q_s^{2/3}$$

che dovrebbe rappresentare il fenomeno del trasporto solido che il BITTERICH ha esaminato con le sue esperienze.

La coincidenza della linea rappresentata dalla [23] con il diagramma indicato, è assicurata per un buon tratto di esso, notevoli divergenze si hanno nell'intervallo di portate liquide per le quali il BITTERICH medesimo ha però osservato il passaggio in sospensione del materiale solido prima muoventesi sul fondo. Perciò l'applicazione della [16], e, quando si conosca la portata critica, della [12], non ha significato quando si tratta del movimento del materiale solido in sospensione. Inoltre l'approssimazione che si ottiene con l'impiego della legge di prima approssimazione è tale che può evitarsi il laborioso calcolo indicato dalla [22].

BIBLIOGRAFIA DEGLI AUTORI CITATI

- F. ARREDI, *Sul trasporto solido delle correnti liquide*. « Annali LL. PP. », fasc. 2°, 1935.
- L. CONTI, *Trasporto solido nei corsi d'acqua*. « Annali LL. PP. », fasc. 4°, 1930, fasc. 11°, 1931, fasc. 7°, 1932.
- INDRI, *Nuove ricerche sulla forza di trascinamento*. « Energia Elettrica », 1936.
- E. MEYER PETER, H. FAVRE, A. EINSTEIN, *Neuere Versuchsergebnisse über den Geschiebetrieb*. « Schweizerische Bauzeitung », Bd 103, n. 13, Marzo 1934, Zurigo.
- E. MEYER PETER, H. FAVRE, R. MULLER, *Beitrag zur Berechnung der Geschiebeführung und der Normalprofilbreite von Gebirg flüssen*. « Schweizerische Bauzeitung », Bd 105, n. 9 e 10, marzo 1935, Zurigo.
- A. SCHOKLITSCH, *Geschiebebewegung in flüssen und in stauwerken*. 1926.
- SCHIELDS, *Anwendung Aenlichkeitsmechanik und der turbulenz-forschung auf die Geschiebebewegung*. Mitteilungen der Preussischen Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau. Berlin.
- S. SHULITS, W. E. CORFITZEN, *Bed load transportation and the stable channel problem*. « American Geophysical Union », 1937, pag. 456 e segg.
- H. WITTMANN, *Geschiebetrieb und flussregelung*. « Deutsche Wasser-Wirtschaft », Jahrgang 37 Heft 6, 1942.
- MITTEILUNGEN DES AMTES FÜR WASSERWIRTSCHAFT, *Wasserführung, Sinkstoffführung und schlammablagerung des Alten Rheins*. Bern, 1932.