PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XI - N. 12
pag. 149-156

RICERCHE SUI DETERMINANTI DI SOMME (*)

LUIGI TENCA

SVMMARIVM. — Attentis progressionibus summarum ordinis n et rationis d, Auctor perpendit (praecipuas quoque proprietates exponens) successiones determinantium summarum et duplicium summarum, quae ex illis progressionibus confici possunt.

In una successione di numeri reali

$$\ldots\ldots a_{-2}\,,\ a_{-1}\,,\ a_0\,,\ a_1\,,\ a_2\,,\ \ldots\ldots$$

per *posto* di un termine intendiamo l'indice di cui è affetto e chiamiamo successione delle prime somme due a due la successione formata ordinatamente coi numeri $a_s^{(1)} = a_s + a_{s+1}$ dove $s = \ldots\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\ldots$; successione delle seconde somme due a due, la successione dei numeri $a_s^{(2)}$, prime somme due a due della successione delle prime somme due a due della data, ecc.

Diciamo che la successione data è una progressione di somme di ordine n e di ragione d, quando $a_s^{(n)} = (-1)^s d$, dove s è un numero intero qualsiasi e d un numero reale costante, diverso da zero.

Si trovano, per tali progressioni, le formule:

$$a_s = (-1)^s \binom{s}{0} a_0 + (-1)^{s+1} \binom{s}{1} a_0^{(1)} + (-1)^{s+2} \binom{s}{2} a_0^{(2)} + \ldots\ldots + (-1)^{s+n} \binom{s}{n} a_0^{(n)}$$

per $s = \ldots\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\ldots$

$$a_p^{(q)} = \binom{q}{0} a_p + \binom{q}{1} a_{p+1} + \binom{q}{2} a_{p+2} + \ldots\ldots + \binom{q}{q-1} a_{p+q-1} + \binom{q}{q} a_{p+q}$$

per $p = \ldots\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\ldots$ e $q = 1, 2, \ldots\ldots, n$

(*) Nota presentata dal Presidente dell'Accademia S. E. Agostino Gemelli O. F. M. il 2 settembre 1947.

ed altre se ne possono trovare non prive di interesse. Noi qui vogliamo invece esporre alcune ricerche sui determinanti di somme che si ricollegano a quelle da noi fatte sui determinanti di differenze [1].

1. – Dalla progressione di somme di ordine n e di ragione d

[1] $$\ldots\ldots a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots,$$

ricaviamo il prospetto:

[2] $$\left\{\begin{array}{llllllll} \ldots\ldots -d, & d, & -d, & d, & -d, & d, & -d, & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots a_{-3}^{(n-1)}, & a_{-2}^{(n-1)}, & a_{-1}^{(n-1)}, & a_0^{(n-1)}, & a_1^{(n-1)}, & a_2^{(n-1)}, & a_3^{(n-1)}, & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots\ldots a_{-3}^{(1)}, & a_{-2}^{(1)}, & a_{-1}^{(1)}, & a_0^{(1)}, & a_1^{(1)}, & a_2^{(1)}, & a_3^{(1)}, & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots a_{-3}, & a_{-2}, & a_{-1}, & a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & \ldots\ldots \end{array}\right.$$

dove ciascuna linea, dalla seconda in poi, ha per successione delle prime somme due a due la linea immediatamente precedente. Diciamo colonna di posto s quella che ha a_s per ultimo elemento.

Formiamo un determinante A di ordine $n+1$ prendendo $n+1$ colonne consecutive del prospetto [2], partendo da quella di posto s qualsiasi e calcoliamone il valore. Aggiungiamo in A all'ultima colonna la penultima, alla penultima la terz'ultima. ecc., alla seconda la prima: sviluppando il nuovo determinante ottenuto secondo gli elementi della prima linea, abbiamo che A è eguale a $(-1)^s d$ per una determinante di ordine n dello stesso tipo. Ripetendo per quest'ultimo il procedimento eseguito su A e ripetendolo poi complessivamente n volte, otteniamo:

$$\mathrm{A} = (-1)^{s(n+1)} d^{n+1} .$$

Formiamo invece il determinante B prendendo $n+1$ colonne qualsiasi rispettivamente di posto $s_1, s_2, \ldots, s_{n+1}$ del prospetto [2], $(s_1 < s_2 < \ldots < s_{n+1})$. Inseriamo fra ciascuna colonna e la successiva le

(1) L. Tenca, *Ricerche sui determinanti di differenze*. «Rendiconti Istituto Lombardo di Sc. e Lett.», vol. LXXVI, 1942-1943, pag. 127-134.

colonne mancanti del prospetto ottenendo una matrice rettangolare di $n+1$ linee e $s_{n+1}-s_1+1$ colonne e completiamola per ricavare un determinante B′ di ordine $s_{n+1}-s_1+1$, con le $s_{n+1}-s_1-n$ linee seguenti ordinatamente al primo, al secondo, ecc. posto nel determinante stesso: prima linea formata da zeri con 1 solo al secondo posto, seconda linea formata da zeri con 1 solo al terzo posto, ecc., (s_2-s_1-1)-esima linea formata da zeri con 1 solo all'(s_2-s_1)-esimo posto, (s_2-s_1)-esima linea formata da zeri con 1 solo all'(s_2-s_1+2)-esimo posto, ecc., (s_3-s_1-2)-esima linea formata da zeri con 1 solo all'(s_3-s_1)-esimo posto, (s_3-s_1-1)-esima linea formata da zeri con 1 solo all'(s_3-s_1+2)-esimo posto, ecc., $(s_{n+1}-s_1-n)$-esima linea formata da zeri con 1 solo all'$(s_{n+1}-s_1)$-esimo posto. Abbiamo che B è eguale, a meno di una potenza di -1, a B′.

Aggiungiamo in B′ all'ultima colonna la penultima, alla penultima la terzultima, ecc., alla seconda la prima. Sviluppando il nuovo determinante ottenuto secondo gli elementi della $(s_{n+1}-s_1-n+1)$-esima linea, abbiamo che B′ è uguale a $(-1)^{(s_{n+1}-s_1-n)s_1}\,d$ per un determinante di ordine $s_{n+1}-s_1$ e ripetendo lo stesso procedimento per quest'ultimo e successivamente in totale $n+1$ volte otteniamo che B′ risulta eguale a $(-1)^{(n+1)(s_{n+1}-s_1-n)s_1}\,d^{n+1}$ per un determinante di ordine $s_{n+1}-s_1-n$ nel quale la prima linea è formata dal primo, dal secondo, ecc. dall'$(s_{n+1}-s_1-n)$-esimo termine delle $(n+1)$-esime somme due a due della successione che costituisce la prima linea di B′, la seconda linea è formata dal primo, dal secondo, ecc., dall'$(s_{n+1}-s_1-n)$-esimo termine delle $(n+1)$-esime somme due a due della successione che costituisce la seconda linea di B′, ecc., l'ultima linea è formata dal primo, dal secondo, ecc., dall'$(s_{n+1}-s_1-n)$-esimo termine delle $(n+1)$-esime somme due a due della successione che costituisce la $(s_{n+1}-s_1-n)$-esima linea di B′. Risulta quindi che B, a meno di una potenza di -1, è eguale a

$$d^{n+1}\begin{vmatrix} \binom{n+1}{1} & \binom{n+1}{1} & 0 & \dots\dots & 0 \\ \binom{n+1}{2} & \binom{n+1}{1} & \binom{n+1}{0} & \dots\dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{n+1}{s_{n+1}-s_1-1} & \binom{n+1}{s_{n+1}-s_1-2} & \binom{n+1}{s_{n+1}-s_1-3} & \dots\dots & \binom{n+1}{n} \end{vmatrix}$$

determinante quest'ultimo di ordine $s_{n+1}-s_1-n$: in esso mancano le linee che avrebbero inizio rispettivamente con $\binom{n+1}{s_2-s_1}, \binom{n+1}{s_3-s_1}, \ldots\ldots \binom{n+1}{s_n-s_1}$.

Se in luogo di considerare il prospetto [2] ne consideriamo un altro nel quale la prima linea è formata da una successione di termini alternativamente eguali a d_1 e $-d_1$, la seconda linea dai termini di una progressione di somme di primo ordine e di ragione d_2, la terza dai termini di una progressione di somme di secondo ordine e di ragione d_3, ecc., l'$(n+1)$-esima linea dai termini di una progressione di somme di ordine n e di ragione d_{n+1}, otteniamo gli stessi risultati soltanto in luogo di d^{n+1} compare il prodotto $d_1 d_2 \ldots\ldots d_{n+1}$.

Se in luogo di prendere $n+1$ colonne consecutive o no, qualunque sia il prospetto, prendiamo $n+1$ *trasversali* parallele, consecutive o no, purchè *intersecanti* tutte le linee, abbiamo analoghe espressioni dei determinanti che si possono *formare per colonne* colle trasversali stesse.

2. – Nella progressione di somme [1] ricordando che

$$a_s = (-1)^s \binom{s}{0} a_0 + (-1)^{s+1} \binom{s}{1} a_0^{(1)} + \ldots\ldots + (-1)^{s+n} \binom{s}{n} a_0^{(n)}$$

abbiamo che la successione contenuta in essa

$$\ldots\ldots, a_{m-2r}, a_{m-r}, a_m, a_{mr+r}, a_{m+2r}, \ldots\ldots$$

dove m è un numero intero qualsiasi (per posto di un termine in essa intendiamo il coefficiente di r); per r pari è una progressione aritmetica di ordine n e di ragione $(-1)^m r^n d$, per r dispari, è una progressione di somme pure di ordine n e di ragione $(-1)^m r^n d$.

Per la dimostrazione basta formare la successione delle differenze prime, seconde, ecc., della progressione data e le successioni delle prime, seconde, ecc. somme due a due della progressione stessa, tenendo conto della indicata espressione di a_s, ricordando le proprietà relative all'addizione termine a termine di più progressioni aritmetiche e quelle relative alla moltiplicazione termine a termine di più progressioni aritmetiche (2).

---

(2) Vedi L. Tenca, *Le progressioni.* «Manuale Giusti», Livorno, 1919.

Abbiamo quindi che considerando il prospetto ottenuto da [2] prendendo le colonne di posto

$$\ldots\ldots, m-2r, \; m-r, \; m, \; m+r, \; m+2r, \ldots\ldots$$

il determinante formato da $n+1$ colonne consecutive di esso, partendo da quella di posto t nel nuovo prospettto (posto dell'ultimo termine della colonna nella sua nuova successione), ha per r pari, il valore $(-1)^{m(n+1)} \, r^{\binom{n+1}{2}} d^{n+1}$, per r dispari il valore, $(-1)^{(m+t)(n+1)} \, r^{\binom{n+1}{2}} d^{n+1}$

3. – Se consideriamo la successione

$$\text{[3]} \qquad \ldots\ldots, a_{m-2\cdot 2}, \; a_{m-2}, \; a_m, \; a_{m+2}, \; a_{m+2\cdot 2}, \ldots\ldots$$

e la successione

$$\ldots\ldots, b_{-2}, \; b_{-1}, \; b_0, \; b_1, \; b_2, \ldots\ldots$$

formata da numeri *interi* in progressione aritmetica di ordine p e di ragione q, abbiamo (3) che la successione

$$\ldots\ldots, a_{m+2b_{-2}}, \; a_{m+2b_{-1}}, \; a_{m+2b_0}, \; a_{m+2b_1}, \; a_{m+2b_2}, \ldots\ldots$$

è una progressione aritmetica di ordine np e di ragione

$$(-1)^m \frac{2^n \, \underline{|np}}{\underline{|n}\,(\underline{|p})^n} \, d\, q^n$$

Ne viene quindi che la successione di determinanti di somme che otteniamo prendendo successivamente $n+1$ colonne consecutive fra quelle di posto

$$\ldots\ldots, m+2b_{-2}, \; m+2b_{-1}, \; m+2b_0, \; m+2b_1, \; m+2b_2, \ldots\ldots$$

(3) Vedi L. Tenca, *Progressioni aritmetiche contenute in una data progressione aritmetica.* «Periodico di Matematiche», serie 4ª, vol. 28 (1943), pag. 112-118.

nel prospetto [2], partendo da ciascuna colonna, è una progressione aritmetica della quale è facile calcolare l'ordine e la ragione (1).

Se nel prospetto [2] sopprimiamo v linee e formiamo col nuovo prospetto risultante la successione di determinanti di somme ottenuti prendendo successivamente $n+1-v$ colonne consecutive fra quelle di posto

$$\ldots\ldots, m+2b_{-2}, m+2b_{-1}, m+2b_0, m+2b_1, m+2b_2, \ldots\ldots$$

partendo da ciascuna colonna, abbiamo pure una progressione aritmetica della quale è facile calcolare l'ordine e la ragione (1).

Ed altre progressioni aritmetiche di determinanti di somme si possono ricavare dal prospetto [2].

4. – Dalla progressione aritmetica [3] di ordine n e di regione $(-1)^m 2^n d$, ricordando l'espresssione (formola di F. Bernoulli) della somma di u termini consecutivi di essa (2) in funzione del primo e dei termini di egual posto di questo nelle successioni delle differenze prime, seconde, ecc., se indichiamo con $S_{h,k}$ la somma di k termini consecutivi partendo dall'h-esimo, per le proprietà delle progressioni aritmetiche che si ottengono addizionando o moltiplicando termine a termine più progressione aritmetiche date (2) abbiamo che la successione

$$\text{[4]} \qquad \ldots\ldots S_{(b_{-1}+1),(b_0-b_{-1})}, \; S_{(b_0+1),(b_1-b_0)}, \; S_{(b_1+1),(b_2-b_1)}, \; \ldots\ldots$$

è una progressione aritmetica di ordine $(n+1)p-1$ e di ragione

$$(-1)^m \frac{2^n \lfloor (n+1)p}{\lfloor n+1 \left(\lfloor p\right)^{n+1}} d\, q^{n+1}$$

Ne viene quindi che se dal prospetto [2] ricaviamo un altro prospetto le cui colonne sono formate per somme colle colonne del prospetto [2], come per somme si ricava la [4] dalla [1], abbiamo che la successione di determinanti di doppie somme che otteniamo da questo nuovo prospetto prendendo successivamente $n+1$ colonne consecutive, a partire da ciascuna colonna, è una progressione aritmetica della quale è facile calcolare l'ordine e la ragione ([1]).

Così, se sopprimiamo nel prospetto [2] v linee e formiamo nel modo sopra indicato un nuovo prospetto, abbiamo che la successione di determinanti di doppie somme che otteniamo da esso prendendo successivamente $n+1-v$ colonne consecutive a partire da ciascuna colonna è una progressione aritmetica della quale è facile calcolare l'ordine e la ragione ([1]).

Ed altre progressioni aritmetiche di determinanti di doppie somme si possono trovare dedotte dal prospetto [2].

Se in luogo di considerare il prospetto [2] partiamo da un altro nel quale la prima linea è formata da una successione di termini alternativamente eguali a d_1 e $-d_1$, la seconda linea dai termini di una progressione di somme di primo ordine e di ragione d_2, ecc., l'$(n+1)$-esima linea dai termini di una progressione di ordine n e di ragione d_{n+1} si ottengono gli stessi risultati che si hanno in questo n. 4 e nel n. 3, soltanto in luogo delle potenze di d nelle ragioni delle progressioni di determinanti, comparirebbero i prodotti delle ragioni delle progressioni che si considerano.

Se nel prospetto [2] o in quello a cui sopra abbiamo accennato in luogo di prendere colonne prendiamo *trasversali* parallele degli stessi posti (intendendo per posto di una trasversale *tracciata* per il termine d_s, il numero s) *intersecanti* o no tutte le linee, i risultati trovati continuano a sussistere.

5. - Abbiamo anche progressioni di somme date da successioni di determinanti di somme ricavate dal prospetto [2].

Ad esempio, se consideriano il prospetto dato da [2] sopprimendo la linea di posto $n-v+1$, per v pari e n dispari, abbiamo che la successione di determinanti di somme che otteniamo prendendo in questo successivamente n colonne consecutive, partendo da ciascuna colonna, è una progressione di somme di ordine v e di ragione d^n.

Se invece nel prospetto [2] sopprimiamo la linea di posto $n-v+1$, per v pari e n dispari, e prendiamo le colonne di posto

$$\ldots\ldots, m-2r, m-r, m, m+r, m+2r, \ldots\ldots$$

dove m è intero qualsiasi ed r è dispari e consideriamo nel nuovo prospetto la successione di determinanti di somme che otteniamo prendendo successivamente n colonne consecutive, partendo da ciascuna colonna, abbiamo una progressione di somme di ordine v e di ragione $(-1)^{mn}(r)^{n^2}d^n$.

Ed altre progressioni di somme di determinanti di somme si possono ricavare dal prospetto [2]. Crediamo ormai inutile insistere sulla questione.

6. - Se in luogo di considerare il prospetto [2] si considera il seguente:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \ldots\ldots & a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots\ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \ldots\ldots \end{array}\right.$$

dove $\ldots\ldots a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$ è una progressioni di somme di ordine n e di ragione d, si hanno analoghe proprietà, evitando le trasversali che contengono elementi eguali.