PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XI - N. 18
pag. 219-226

SULLA DIPENDENZA LINEARE DELLE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI (*)

GIOVANNI MULÈ

Svmmarivm. — Auctor determinat linearis dependentiae rationes, quod attinet ad functiones non analyticas plurium variabilium independentium in campis conexis, considerans extinctionem determinantium wronskiani generis, quae scilicet ex ipsis functionibus et ex quibusdam earum partialibus derivatis efformantur.

1. – In questa Nota ci proponiamo di assegnare un criterio di dipendenza lineare per un numero qualsiasi m di funzioni non analitiche di r variabili in un campo (1) C. Nel caso particolare di tre funzioni di due variabili indipendenti si ritrova il criterio dimostrato per altra via da S. Coronato (2) e di cui il nostro appare come la più naturale estensione.

2. – *Date m funzioni di r variabili $u_i(x_1, x_2, \dots, x_r)$, $i = 1, 2, \dots, m$, continue con le loro derivate parziali fino all'ordine $m-1$ incluso, in*

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giovanni Giorgi, il 19 settembre 1947.

(1) Per campo intendesi, secondo la terminologia del Prof. Picone, un insieme aperto connesso.

(2) S. Cononato, *Criteri wronskiani di dipendenza lineare per funzioni di più variabili indipendenti*. [Pont. Acad. Scientiarum, « Commentationes », anno V, 1941, vol. V, n. 4].

un campo C, *se in* C *sono identicamente nulli i seguenti determinanti:*

$$[1] \qquad W = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots\cdots & u_m \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_1^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \frac{\partial^{m-1} u_1}{\partial x_1^{m-1}} & \frac{\partial^{m-1} u_2}{\partial x_1^{m-1}} & \cdots\cdots & \frac{\partial^{m-1} u_m}{\partial x_1^{m-1}} \\ \frac{\partial^{m-2} u_1}{\partial x_1^{m-2}} & \frac{\partial^{m-2} u_2}{\partial x_1^{m-2}} & \cdots\cdots & \frac{\partial^{m-2} u_m}{\partial x_1^{m-2}} \end{vmatrix} = 0$$

$$[2] \qquad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots\cdots & u_m \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_1^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \frac{\partial^{m-2} u_1}{\partial^{m-2} u_1} & \frac{\partial^{m-2} u_2}{\partial x_1^{m-2}} & \cdots\cdots & \frac{\partial^{m-2} u_m}{\partial x_1^{m-2}} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_k} & \frac{\partial u_2}{\partial x_k} & \cdots\cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \end{vmatrix} = 0 \quad (k = 2, 3, \ldots, r)$$

e se inoltre la matrice formata con le prime $m-1$ *righe di* W *ha in* C *caratteristica costante massima* ($= m-1$), *allora le* m *funzioni date sono in* C *linearmente dipendenti.*

Indichiamo con $W_1, W_2, \ldots, W_m$ i complementi algebrici degli elementi dell'ultima riga di W e poniamo

$$[3] \qquad R = \sqrt{W_1^2 + W_2^2 + \ldots + W_m^2}$$

$$[4] \qquad \alpha_i = \frac{W_i}{R} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) .$$

Per le ipotesi fatte si ha $R \neq 0$ in C e le α_i sono allora funzioni delle $x_1, x_2, \ldots, x_r$ continue assieme alle loro derivate parziali del primo ordine. Tali α_i soddisfano per le [1], [3], [4] alle seguenti equazioni:

$$[5] \qquad \begin{cases} \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_m u_m = 0 \\ \alpha_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \alpha_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + \ldots + \alpha_m \dfrac{\partial u_m}{\partial x_1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 \dfrac{\partial^{m-2} u_1}{\partial x_1^{m-2}} + \alpha_2 \dfrac{\partial^{m-2} u_2}{\partial x_1^{m-2}} + \ldots + \alpha_m \dfrac{\partial^{m-2} u_m}{\partial x_1^{m-2}} = 0 \end{cases}$$

$$[6] \qquad \alpha_1 \frac{\partial^{m-1} u_1}{\partial x_1^{m-1}} + \alpha_2 \frac{\partial^{m-1} u_2}{\partial x_1^{m-1}} + \ldots + \alpha_m \frac{\partial^{m-1} u_m}{\partial x_1^{m-1}} = 0$$

$$[7] \qquad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_m^2 = 1 \, .$$

Derivando entrambi i membri delle [5] e [7] rispetto alla x_1, tenendo conto delle [5] stesse e della [6], si ha:

$$[8] \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial u_1} u_1 + \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} + \ldots + \dfrac{\partial \alpha_m}{\partial x_1} u_m = 0 \\ \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + \ldots + \dfrac{\partial \alpha_m}{\partial x_1} \dfrac{\partial u_m}{\partial x_1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \dfrac{\partial^{m-2} u_1}{\partial x_1^{m-2}} + \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \dfrac{\partial^{m-2} u_2}{\partial x_1^{m-2}} + \ldots + \dfrac{\partial \alpha_m}{\partial x_1} \dfrac{\partial^{m-2} u_m}{\partial x_1^{m-2}} = 0 \\ \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \alpha_1 + \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \alpha_2 + \ldots + \dfrac{\partial \alpha_m}{\partial x_1} \alpha_m = 0 \, . \end{cases}$$

Le [8] costituiscono un sistema di m equazioni lineari omogenee nelle $\dfrac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}, \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial \alpha_m}{\partial x_1}$ per cui il determinante D dei coefficienti è $\neq 0$. Si ha infatti sviluppandolo secondo gli elementi dell'ultima riga:

$$D = \alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2 + \ldots + \alpha_m W_m =$$

$$= R(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_m^2) = R \neq 0 \, .$$

Ne segue quindi

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial x_1} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m) \; . \tag{9}$$

Dalla [2] si ha, sviluppando secondo l'ultima riga e ricordando la [4]

$$\alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_k} + \alpha_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_k} + \ldots + \alpha_m \frac{\partial u_m}{\partial x_k} = 0 \quad (k = 2, 3, \ldots, m). \tag{10}$$

Derivando allora entrambi i membri della prima delle [5] rispetto a x_k $(k = 2, 3, \ldots, m)$ e tenendo conto della [10] si ha:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_k} u_1 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_k} u_2 + \ldots + \frac{\partial \alpha_m}{\partial x_k} u_m = 0 \quad (k = 2, 3, \ldots, m), \tag{11}$$

da cui, derivando successivamente rispetto alla x_1 e osservando che, in virtù della [9], è $\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_k} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$, si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial x_k} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + \ldots + \dfrac{\partial \alpha_m}{\partial x_k} \dfrac{\partial u_m}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^{\,2}} + \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial x_k} \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^{\,2}} + \ldots + \dfrac{\partial \alpha_m}{\partial x_k} \dfrac{\partial^2 u_m}{\partial x_1^{\,2}} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial x_k} \dfrac{\partial^{m-2} u_1}{\partial x_1^{\,m-2}} + \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial x_k} \dfrac{\partial^{m-2} u_2}{\partial x_1^{\,m-2}} + \ldots + \dfrac{\partial \alpha_m}{\partial x_k} \dfrac{\partial^{m-2} u_m}{\partial x_1^{\,m-2}} = 0 \end{array} \right. \tag{12}$$

$$(k = 2, 3, \ldots, m) \; .$$

Dalla [7] infine mediante derivazione rispetto a x_k abbiamo:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_k} \alpha_1 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_k} \alpha_2 + \ldots + \frac{\partial \alpha_m}{\partial x_k} \alpha_m = 0 \; . \tag{13}$$

Dalle [11], [12], [13], ragionando come in precedenza per la [8], deduciamo:

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_k} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\; k = 2, 3, \ldots, m). \tag{14}$$

Dalle [9] e [14] segue che le α_i si riducono a delle costanti, che non potranno essere tutte nulle per la [7]. La prima delle [5] ci dice allora che le nostre funzioni sono in C linearmente dipendenti c. v. d.

3. – Dalla precedente dimostrazione si possono facilmente dedurre talune osservazioni fatte dal CORONATO nella Memoria citata. Dalla [4] si può intanto rilevare che se W_i è $\neq 0$ in un punto di C rimane $\neq 0$ in tutto C. Da ciò risulta che *la condizione per la matrice formata con le prime* $m-1$ *righe di* W *di possedere caratteristica costante mas- è del tutto equivalente a quella di supporre* $\neq 0$ *in* C *uno dei complementi algebrici dell'ultima riga di* W.

Dalla [4] si vede anche immediatamente che *se* $p\,(\leq m-1)$ *dei* W_i *sono identicamente nulli in* C, *oltre la dipendenza lineare delle* m *funzioni* u_i *si può altresì affermare la dipendenza lineare di* $m-p$ *di esse.*

4. – È superfluo osservare che nell'enunciato del teorema il ruolo della variabile x_1 può essere assunto da una qualsiasi delle altre x_i.

5. UN'APPLICAZIONE. – Consideriamo un vettore $\boldsymbol{v}$ funzione del posto, di componenti $v_x(x, y, z)$, $v_y(x, y, z)$, $v_z(x, y, z)$ rispetto ad una terna di assi cartesiani ortogonali, vettore che potrebbe ad esempio rappresentare la velocità locale in un moto stazionario di un mezzo continuo. Il teorema precedente fornisce allora delle condizioni sufficienti affinchè il vettore $\boldsymbol{v}$ si mantenga costantemente parallelo ad una giacitura fissa, ovvero, nella interpretazione che abbiamo dato di $\boldsymbol{v}$, affinchè le linee di corrente siano contenute in piani fra loro paralleli.

Le condizioni del teorema tradotte in forma vettoriale sono le seguenti:

$$\boldsymbol{v} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} \neq 0 \tag{15}$$

$$\boldsymbol{v} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} \times \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial x^2} = 0 \tag{16}$$

$$\boldsymbol{v} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y} = 0 \tag{17}$$

$$\boldsymbol{v} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z} = 0 \, . \tag{18}$$

È facile allora constatare direttamente che, se sono soddisfatte le [15], [16], [17], [18], il vettore $\boldsymbol{v}$ rimane costantemente perpendicolare a una retta fissa.

Indicando con $\boldsymbol{u}$ il versore di $\boldsymbol{v} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}$, si ha ovviamente:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = 0 \tag{19}$$

$$\boldsymbol{u} \times \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} = 0 \tag{20}$$

$$\boldsymbol{u} \times \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial x^2} = 0 \tag{21}$$

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} = 1 \ , \tag{22}$$

da cui mediante derivazione rispetto a x si ottiene:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \times \boldsymbol{v} = 0 \tag{23}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} = 0 \tag{24}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \times \boldsymbol{u} = 0 \ . \tag{25}$$

Dalle [23], [24] segue $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} = \lambda \boldsymbol{u}$, essendo λ uno scalare, e quindi per la [25]

$$\lambda \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{ossia} \quad \lambda = 0 \ .$$

Pertanto si ha:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} = 0 \ . \tag{26}$$

Dalla [19] derivando rispetto alla y e tenendo conto della [17] si ottiene:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} \times \boldsymbol{v} = 0 \ , \tag{27}$$

da cui derivando rispetto alla x e ricordando la [26] segue:

[28] $$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} \times \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} = 0 .$$

Inoltre dalla [22] abbiamo:

[29] $$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} \times \boldsymbol{u} = 0 .$$

Dalle [27], [28], [29] risulta

[30] $$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} = 0 .$$

In modo analogo si dimostra la

[31] $$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z} = 0 .$$

Dalle [26], [30], [31] si deduce che $\boldsymbol{u}$ è un vettore costante e quindi il nostro asserto discende dalla [19].