PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XI - N. 23
pag. 259-272

APPUNTI PER UNA TEORIA INTRINSECA DELLE VARIABILI COMPLESSE SOPRA UNA SUPERFICIE (*)

LUIGI CASTOLDI

SVMMARIVM. — Agit Auctor de functionibus analiticis in superficie ut tensoribus conceptis.

1. – In una nota di carattere elementare di qualche anno addietro (1) ho mostrato come la nozione di numero complesso possa identificarsi (con qualche vantaggio concettuale) con quella di tensore del secondo ordine del piano, avente matrice delle componenti del tipo

$$\begin{Vmatrix} a & b \\ -b & a \end{Vmatrix} . \tag{1}$$

Siffatti tensori costituiscono, come tali, l'unica possibile generalizzazione della nozione di numero reale, che soddisfaccia alla condizione di permanenza delle proprietà formali delle operazioni del calcolo numerico.

Il supporre, in [1], a e b funzioni del posto (x^1, x^2) nel piano porta naturalmente alla nozione di « *variabile complessa* ».

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giovanni Giorgi il 14 settembre 1947.

(1) LUIGI CASTOLDI, *Alcune osservazioni sui numeri complessi e sui quaternioni.* « Per. di Matematiche », sez. 4ª, Vol. XX, pag. 185 (1940).

Volendo mettere in evidenza il carattere tensoriale del raggruppamento [1], converrà scrivere la variabile complessa sotto la forma

$$[2] \qquad T^i_{.j} = a(x^1, x^2)\,A^i_{.j} + b(x^1, x^2)\varepsilon^{ih} g_{hj} \qquad (i, j = 1, 2)$$

dove a e b sono assegnate funzioni invarianti e g^{ij} ed ε_{ij} sono rispettivamente il primo e il secondo tensore fondamentale della varietà piana. È poi $A_i^{\cdot j} = g_{ih} g^{hj}$ il tensore fondamentale unitario. In tal modo è data forma invariantiva, di fronte a tutti i possibili sistemi di riferimento nel piano, alla nozione di variabile complessa.

Ma v'ha di più: l'espressione a secondo membro di [2] ha forma tensoriale generale, nel senso che in essa non v'è traccia della particolare natura metrica della varietà delle variabili x^1, x^2. Ne risulta immediatamente la possibilità di estensione, senza alcuna modificazione formale, della nozione di variabile complessa dal piano a una V_2 di metrica qualunque.

Sopra una qualsivoglia superficie V_2 definiremo dunque come « *variabile complessa* » o « *tensore complesso* » il più generale tensore della forma [2] (¹).

2. – La nozione di variabile complessa si precisa interpretando il tensore $T^i_{.j}$ come *operatore su vettori* in V_2. Si riconosce tosto, attraverso la struttura [2] di $T^i_{.j}$, che, in un generico punto di V_2, l'applicazione di tale operatore a un vettore v^i, producendo il vettore $w^i = T^i_{.j} v^j$, ha per effetto di moltiplicare il vettore dato per lo scalare a, di moltiplicare per b il vettore che si ottiene dal dato con una rotazione positiva di un angolo retto, indi di sommare i risultati ottenuti.

Si constata poi che l'ordine delle prime due operazioni eseguite è inessenziale, in virtù della proprietà commutativa della somma di vettori.

Una restrizione essenziale alla nozione di variabile complessa, come fin qui concepita, consiste nell'imporre all'operatore $T^i_{.j}$ di soddisfare

(¹) È forse superfluo rilevare che, nonostante l'uso dell'aggettivo « *complesso* » che adottiamo per ovvie ragioni di consuetudine, tutte le quantità che entrano nella presente trattazione sono *esclusivamente reali*.

alla seguente condizione: che, applicato ad un vettore qualunque v^j, dotato di carattere conservativo, per cui sia cioè div $\mathbf{v} = 0$, produca un vettore w^i per cui sia div $\mathbf{w} = 0$. Si richiede cioè che l'operatore $T_i^{\cdot j}$ mantenga l'eventuale carattere conservativo dei vettori cui si applica.

Questa condizione si esprime in formule affermando che è

[3] $$\nabla_i (T^i_{\cdot j}\, v^j) = 0$$

ogni qualvolta sia

[3'] $$\nabla_j v^j = 0 \ .$$

Da ciò segue che è

[3] $$\nabla_i (T^i_{\cdot j}\, v^j) = \nabla_i T^i_{\cdot j} \cdot v^j = 0 \ ,$$

per ogni vettore v^j a divergenza nulla. Poichè quest'ultima limitazione sulla natura di $\mathbf{v}$ non vincola ovviamente in modo alcuno i valori *locali* di $\mathbf{v}$, consegue da [4]:

[5] $$\triangle_i T^i_{\cdot j} = 0 \ ,$$

ossia facendo uso di notazioni introdotte in altra parte (1),

[5'] $$\mathrm{Div}_{[1]}\, \mathbf{T} = 0 \ .$$

Ricorrendo all'espressione esplicita di $T^i_{\cdot j}$, la [5] diventa:

[6] $$\frac{\partial a}{\partial x^i} A^i_{\cdot j} + \frac{\partial b}{\partial x^i} \varepsilon^{ih} g_{hj} = 0 \ ,$$

ossia

[6'] $$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial x^1} + \frac{g_{21}}{\sqrt{g}} \frac{\partial b}{\partial x^1} - \frac{g_{11}}{\sqrt{g}} \frac{\partial b}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial a}{\partial x^2} + \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \frac{\partial b}{\partial x^1} - \frac{g^{12}}{\sqrt{g}} \frac{\partial b}{\partial x^2} = 0 \ , \end{aligned} \right.$$

(1) L. Castoldi, *Estensione a tensori qualunque di alcuni teoremi fondamentali dell'Analisi vettoriale.*

le quali, nel caso di una V_2 piana e di un riferimento ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, si semplificano nelle seguenti:

$$[6''] \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial x^1} = \dfrac{\partial b}{\partial x^2} \\[2ex] \dfrac{\partial a}{\partial x^2} = -\dfrac{\partial b}{\partial x^1} \end{cases}$$

e coincidono colle notissime equazioni di Cauchy-Riemann, o *condizioni di monogeneità* (¹).

Verificandosi dunque la [5'] per un tensore $T^i_{\cdot j}$ in V_2 del tipo [2], risulta giustificato assumere un tale tensore come l'ente che generalizza a una V_2 qualunque la nozione di «*variabile monogena complessa*» e interpretare la [5'] o le [6'] come relative «*condizioni di monogeneità*».

Le [6] con riferimento ad indici di controvarianza, può scriversi

$$[6'''] \qquad (\text{grad}\ a)_i\, g^{ij} = -\varepsilon^{ji}(\text{grad}\ b)_i\ ,$$

nella quale il vettore del secondo membro si ottiene, punto per punto di V_2, da grad b, con una rotazione negativa di un angolo retto nel rispettivo piano tangente. Risulta di qui che, su V_2, i campi vettoriali grad a e grad b, e, con essi, le congruenze di linee $a =$ costante, $b =$ costante riescono dappertutto mutuamente ortogonali.

Ciò spiega il presentarsi della nozione di variabile monogena complessa in tutti i problemi fisici bidimensionali (tipica, al riguardo la teoria dei moti laminari irrotazionali di fluidi perfetti (²) in cui intervengano con carattere intrinseco un campo vettoriale irrotazionale e le rispettive traiettorie ortogonali.

(¹) La nozione di variabile complessa su una superficie risale al BELTRAMI [*Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque.* «Annali di Matematica pura ed applicata», Serie II, tomo 1° (1868), pagg. 329-366], cui sono dovute le condizioni di monogeneità [6'] sotto una forma equivalente cui si perverrebbe partendo dall'analoga controvariante di [6]. Su queste nozioni fondamentali tornarono in seguito il CISOTTI [*Equazioni fondamentali dei moti laminari sopra una superficie.* «Rend. Acc. Lincei», vol. 1, serie 6ª (1925), pagg. 612-617], e il PALATINI [*Sulle funzioni di variabile complessa di una superficie e sui moti laminari.* «Boll. dell'Un. Mat. Italiana», vol. 7 (1928), pagg. 82-87].

(²) Si confrontino i lavori di U. CISOTTI e di A. PALATINI, citati nella nota precedente.

Va anche osservato che, moltiplicando entrambi i membri di [6‴] per $\varepsilon_{jh}\, g^{hr}$, si perviene alla relazione equivalente

$$[6^{IV}] \qquad (\text{grand}\, b)_i\, g^{ij} = \varepsilon^{ji}\, (\text{grand}\, a)_i$$

Dopo di che, prendendo la divergenza di [6‴], introducendo in V_2 il parametro differenziale secondo generalizzato

$$\Delta_2 \varphi = \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} - \left\{ {k \atop i\,j} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}\right] g^{ij} = \nabla_j \nabla_i \varphi \cdot g^{ij} \quad ,$$

e notando infine che il tensore doppio $\nabla_j \nabla_i \varphi$ è simmetrico rispetto agli indici i e j, riconosciamo che, per l'invariante scalare a, vale l'equazione generalizzata di Laplace:

$$[7] \qquad \Delta_2 a = 0$$

In modo analogo, partendo da [6^{IV}], si riconosce valida per b la stessa equazione:

$$[7'] \qquad \Delta_2 b = 0$$

Viceversa se a è un invariante armonico, soddisfacente cioè all'equazione [7], le [6'] determinano b, pure armonico per [7'], a meno di un fattore costante. Abbiamo in a e in b la generalizzazione (risalente al Beltrami) delle classiche funzioni armoniche associate dell'ordinaria teoria delle funzioni di variabile complessa.

Ancora, se $\boldsymbol{v}$ è un vettore irrotazionale e a divergenza nulla in V_2, è

$$\boldsymbol{v} = \text{grad}\, a \; , \qquad \Delta_2 a = 0 \; .$$

Al vettore $\boldsymbol{v}$ è dunque legato un invariante armonico a, e quindi, per quanto precede, una variabile analitica complessa in V_2. Il che conferma quanto si è sopra osservato attorno al costante intervento di questa nozione nei problemi in cui si presentano campi vettoriali del tipo considerato.

3. - Sia ora

$$[2'] \qquad U^i_{.j} = A(x^1, x^2)\, A^i_{.j} + B(x^1, x^2)\, \varepsilon^{ih} g_{hj}$$

una seconda variabile complessa (1) definita sopra la medesima V_2.

È sempre possibile concepire $A(x^1, x^2)$ e $B(x^1, x^2)$ come funzioni continue e derivabili di a e di b. Basta infatti pensare invertite le relazioni $a = a(x^1, x^2)$, $b = b(x^1, x^2)$ e sostituiti i risultati in luogo di x^1 e di x^2 in A e B. La richiesta invertibilità risulta poi assicurata dal fatto che il determinante funzionale

$$D = \frac{\partial(a, b)}{\partial(x^1, x^2)} \quad ,$$

non si annulla nel campo considerato di V_2, in virtù della rilevata ortogonalità dei vettori grad a e grad b.

Diremo, in tal senso, che, date due variabili complesse $T^i_{.j}$, $U^i_{.j}$ in un medesimo campo di V_2 è sempre possibile concepir l'una come « *funzione* » dell'altra, intendendo con ciò dichiarare la riconosciuta esistenza di due funzioni continue e derivabili f e φ di due argomenti, per cui è

$$A = f(a, b) \quad , \qquad B = \varphi(a, b)$$

Una tale definizione è conforme, nello spirito, se non nei particolari applicativi, alla definizione generale di « *funzioni di matrici* » data vari anni addietro dal Giorgi e successivamente approfondita in pregevoli lavori dal Giorgi stesso, dalla Signora Porcu-Tortrini e dal Fantappiè (2), il quale ultimo vi ha applicato i concetti e i procedimenti della sua teoria dei funzionali analitici.

---

(1) Nel seguito, dato che non considereremo variabili complesse che non siano monogene, ometteremo tale aggettivo nella locuzione *variabile monogena complessa*.

(2) G. Giorgi, *Sulle funzioni di matrici.* « Atti Acc. Naz. dei Lincei », serie 6ª, vol. VII (1928), pag. 178; e: *Nuove osservazioni sulle funzioni delle matrici.* Ibidem, vol. VIII (1928), pag. 3.

E. Porcu-Tortrini, *Calcolo delle funzioni qualunque delle matrici di secondo ordine.* « Atti Acc. Naz. dei Lincei », serie 6ª, vol. VII (1928), pag. 206.

L. Fantappiè, *Le calcul des matrices.* «Compes Rendus» de Paris, vol. 186 (1928), pagg. 619-621.

Senonchè, tornando al caso che ci interessa, cioè di un tensore complesso $U^i_{.j}$ in V_2, funzione di un altrettale $T^i_{.j}$, va rilevato che la definizione testè adottata non può considerarsi come rispondente all'indole delle considerazioni che stiamo svolgendo, giacchè, per essa, risultano piuttosto definiti gli elementi della matrice $U^i_{.j}$ come funzioni di quelli di $T^i_{.j}$, anzichè, come sarebbe desiderabile, il tensore stesso $U^i_{.j}$ come funzione (tensorialmente caratterizzabile) di $T^i_{.j}$.

Se al requisito del carattere tensoriale del legame di dipendenza tra $U^i_{.j}$ e $T^i_{.j}$ si aggiunge l'altro, che sia possibile definire una derivata (prima) di $U^i_{.j}$ rispetto a $T^i_{.j}$, risulta evidente la necessità di apportare alla precedente definizione una forte limitazione di contenuto. Precisamente, appare necessario considerare come funzioni di $T^i_{.j}$ i soli tensori costruibili come serie di potenze (positive e negative) di $T^i_{.j}$, cioè limitare la nozione generale di funzione a quella di « *funzione analitica* ».

L'espressione della più generale funzione (analitica) della variabile complessa $T^i_{.j}$ va dunque concepita della forma:

[8] $$U^i_{.j} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (a\,A^r_{.s} + b\,\varepsilon^{rh} g_{hs})^n \quad ,$$

dove le c_n sono costanti (reali) e le $a(x^1, x^2)$, $b(x^1, x^2)$ funzioni (reali) del posto in V_2, dotate di derivate prime continue soddisfacenti le condizioni di omogeneità [6'].

Va notato che, nel secondo membro della [8], con

$$T^i_{.j} = a\,A^i_{.j} + b\,\varepsilon^{ih} g_{hj} \quad ,$$

va ritenuto

$$(T^i_{.j})^2 = T^i_{.h} T^h_{.j} = (a^2 - b^2) A^i_{.j} + 2ab\,\varepsilon^{ih} g_{hj} \quad ,$$

$$(T^i_{.j})^n = T^i_{.h_1} T^{h_1}_{.h_2} \ldots\ldots T^{h_{n-1}}_{.\ j}$$

inoltre:

$$(T^i_{.j})^{-1} = \frac{a\,A^i_{.j} - b\,\varepsilon^{ih} g_{hj}}{a^2 + b^2} \quad ,$$

con che risulta

$$(T^i_{.h})\,(T^h_{.j})^{-1} = A^i_{.j} \quad ,$$

e infine

$$(T^{i}_{\cdot j})^{-n} = \left[(T^{i}_{\cdot j})^{-1}\right]^{n}$$

Risulta da ciò e dall'osservare che è, in virtù di [5], con n intero positivo o negativo qualunque:

$$\nabla_i (T^{i}_{\cdot j})^{n} = n (T^{i}_{\cdot j})^{n-1} \nabla_h T^{h}_{\cdot i} = 0 \ ,$$

l'effettivo carattere di tensore complesso di ogni termine della serie [8], e quindi della sua somma in tutto il campo di convergenza.

4. – A valutare l'entità della restrizione imposta alla nozione di funzione di variabile complessa colla condizione di analiticità giova introdurre nell'espressione del tensore complesso $T^{i}_{\cdot j}$, in luogo degli invarianti cartesiani a, b, gli invarianti polari ρ, ϑ, come i primi funzioni di x^1 e di x^2, e legati ad essi dalle relazioni $a = \rho \cos\vartheta$, $b = \rho \operatorname{sen} \vartheta$, si ha allora

$$T^{i}_{\cdot j} = \rho \cos\vartheta \, A^{i}_{\cdot j} + \rho \operatorname{sen}\vartheta \, \varepsilon^{ih} g_{hj}$$

e

$$(T^{i}_{\cdot j})^{n} = \rho^{n} \cos n\vartheta \, A^{i}_{\cdot j} + \rho^{n} \operatorname{sen} n\vartheta \, \varepsilon^{ih} g_{hj} \ ,$$

con n intero qualunque.

La [8] può allora scriversi

[8′] $$U^{i}_{\cdot j} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \rho^{n} (\cos n\vartheta \, A^{i}_{\cdot j} + \operatorname{sen} n\vartheta \, \varepsilon^{ih} g_{hj})$$

Secondo la prima, più ampia definizione, si avrebbe invece

[9] $$U^{i}_{\cdot j} = A(\rho, \vartheta) A^{i}_{\cdot j} + B(\rho, \vartheta) \varepsilon^{ih} g_{hj}$$

con $A(\rho, \vartheta)$, $B(\rho, \vartheta)$ funzioni univoche, continue e derivabili con derivate prime continue in tutto il campo di definizione.

L'univocità supposta di A e di B implica il loro carattere periodico, di periodo 2π, rispetto alla variabile ϑ. La continuità delle stesse funzioni, unitamente a quelle delle loro derivate prime rispetto ϑ consente poi il loro sviluppo in serie di Fourier uniformemente convergente nell'intervallo $(0,2\pi)$.

Alla [9] può quindi darsi la forma:

$$[10] \qquad U^i_{.j} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(f_n(\rho) \cos n\vartheta\, A^i_{.k} + \varphi_n(\rho) \operatorname{sen} n\vartheta\, \varepsilon^{ih} g_{hj}\right) .$$

Il confronto della [10] colla [8'] mostra che la supposta analicità equivale ad imporre, per ogni n, la condizione

$$f_n(\rho) = \varphi_n(\rho) = c_n \rho^n .$$

Il campo di regolarità della serie [8] coincide con quello della serie che se ne deduce per derivazione formale, termine a termine, cioè della serie

$$[11] \qquad (U^i_{.j})' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n c_n (a A^i_{.j} + b \varepsilon^{ih} g_{hj})^{n-1} .$$

L'uniforme convergenza di quest'ultima a una funzione continua in ogni dominio contenuto entro il campo di convergenza, consente di assumerla come funzione analitica «*derivata*» di $U^i_{.j}$. Un fatto notevole che risulta immediatamente di qui è che la definizione data di funzione analitica di variabile complessa, mentre dapprima è *imposta* dall'esigenza della definibilità della derivata prima, consente poi immediatamente, una volta istituita, la definizione e la costruzione di tutte le derivate successive, convergenti tutte ad altrettante funzioni continue di variabile complessa nell'interno di un medesimo campo di definizione.

Risulta di qui chiaramente che il fatto fondamentale della illimitata derivabilità delle funzioni analitiche di una variabile complessa è una immediata conseguenza del postulato di esistenza e di costruibilità di una derivata prima; laddove, nella trattazione consueta, esso ne risulta come conseguenza alquanto remota, pervenendosi ad esso attraverso la formula integrale di Cauchy.

Tutto ciò, unitamente all'evitato uso dell'immaginario, può interpretarsi come una prova del carattere più strettamente legato alla natura intima delle cose della presente impostazione dei concetti.

5. – Il punto di vista qui adottato porta anche immediatamente alla dimostrazione e ad una interessante interpretazione del fondamentale teorema di CAUCHY per funzioni analitiche di variabile complessa sopra una V_2 qualunque.

Abbiamo infatti dimostrato in altra parte [1] che per un tensore generico sopra una qualunque varietà V_n vale un «*teorema della divergenza*» generalizzato, esprimentesi nella formula:

$$[12] \qquad \int_S \nabla_j T^{i_1 \dots i_{k-1} j i_{k+1} \dots i_p} \, dS = \int_\sigma T^{i_1 \dots i_{k-1} j i_{k+1} \dots i_p} \chi_j \, d\sigma \quad ,$$

o, sotto forma sintetica, con ovvio simbolismo:

$$[12'] \qquad \int_S \mathrm{Div}_{[k]} \, T^{(p)} \, dS = \int_\sigma (T^{(p)}, \chi)_{[k]} \, d\sigma$$

dove S è una qualunque regione connessa della V_n assegnata, racchiusa dalla ipersuperficie di contorno σ, e χ il vettore unitario normale a σ, diretto verso l'esterno di S; k è il «*posto*» rispetto cui sono fatti, la divergenza, nel primo membro, e il prodotto interno, nel secondo membro di [12'].

Applicando il teorema richiamato alla V_2 che ci occupa e al tensore complesso $T^i_{\cdot j}$ su essa, e ricordando inoltre la [5'], otteniamo subito

$$[13] \qquad \int_l T^i_{\cdot j} \chi_i \, dl = 0$$

dove l è ora un qualunque contorno completo racchiudente un campo connesso in V_2, *di regolarità* per $T^i_{\cdot j}$. Ma se t^i è il vettore unitario tangente a l, diretto in modo che la coppia $\chi, \boldsymbol{t}$ sia positiva, si ha:

$$\chi_j = - \varepsilon_{jk} t^k \quad ,$$

e la [13] diventa:

$$[13'] \qquad \int_l T^i_{\cdot j} \varepsilon_{ik} t^k \, dl = 0 \quad ,$$

[1] L. CASTOLDI, *Attorno a un «Teorema della divergenza» per tensori qualunque negli Spazi di Riemann.*

ossia, passando alle componenti controvarianti:

$$
[14] \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_l a \frac{1}{\sqrt{g}}\, dy + b\, dx = 0 \ , \\ &\int_l a \frac{1}{\sqrt{g}}\, dx - b\, dy = 0 \ , \end{aligned} \right.
$$

equazioni che generalizzano ovviamente quelle che si ottengono annullando separatamente la parte reale e il coefficiente dell'immaginario nel primo membro della classica identità di CAUCHY, $\int f(z)\, dz = 0$.

6. – L'impostazione precedente della teoria delle funzioni analitiche di una variabile complessa in V_2 offre immediata possibilità di estensione nel senso dell'istituzione del concetto di funzione analitica di due o più variabili complesse. Naturalmente, se $\underset{1}{T}{}^{i}_{\cdot j}, \underset{2}{T}{}^{i}_{\cdot j}, \ldots, \underset{m}{T}{}^{i}_{\cdot j}$ sono m variabili complesse ed $U^{i}_{\cdot j}$ una $(m+1)$-esima da concepirsi funzione di esse, e se tutte vogliamo dotate del carattere tensoriale che abbiamo attribuito a una qualunque variabile complessa, è necessario concepire sia le $\underset{k}{T}{}^{i}_{\cdot j}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, sia la $U^{i}_{\cdot j}$ come tensori complessi definiti in un comune campo di una medesima V_2.

Dopo di che, la $U^{i}_{\cdot j}$, in base a considerazioni analoghe a quelle precedentemente svolte nel caso di una sola variabile $T^{i}_{\cdot j}$ andrà di nuovo definita come funzione analitica delle $\underset{k}{T}{}^{i}_{\cdot j}$ quando sussista per essa uno sviluppo della forma:

$$
[15] \qquad U^{i}_{\cdot j} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum C^{(n)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} (\underset{1}{T}{}^{i}_{\cdot j})^{\alpha_1} \ldots (\underset{m}{T}{}^{i}_{\cdot j})^{\alpha_m} \ ,
$$

dove la somma interna va estesa a tutte le partizioni dell'intero n (con ripetizione e con possibili termini nulli) in numeri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ per cui sia $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = n$.

Argomentazioni analoghe a quelle svolte nel numero 3, provano ancora che la $U^{i}_{\cdot j}$ definita da [15] ha effettivamente il carattere di una variabile complessa in V_2, illimitatamente derivabile, in un medesimo campo, rispetto a ciascuna delle $\underset{k}{T}{}^{i}_{\cdot j}$ $(k = 1, 2, \ldots m)$. In particolare, risultando $U^i_{.j}$ a divergenza nulla, come ciascuna delle $\underset{k}{T}{}^i_{.j}$, vale per essa il richiamato teorema di CAUCHY.

Una osservazione essenziale va fatta peraltro a questo punto, e cioè che il concetto di funzione analitica di più variabili complesse, come sopra introdotto, riuscirebbe puramente illusorio allorchè le $\underset{k}{T}{}^i_{.j}$ riuscissero tutte funzioni analitiche di una sola, diciamo $\underset{1}{T}{}^i_{.j}$, tra esse. Effettivamente, in tal caso, la $U^i_{.j}$ si ridurrebbe ovviamente a una funzione analitica della sola $T^i_{.j}$.

Ma se le $\underset{k}{T}{}^i_{.j}$ sono, non funzionalmente indipendenti, (chè, come precendemente si è rilevato, due variabili complesse qualunque, in un medesimo campo di una V_2, sono sempre concepibili l'una quale funzione dell'altra), ma *analiticamente* indipendenti, nel senso che non sia possibile attribuire ad alcuna delle $\underset{k}{T}{}^i_{.j}$ un'espressione della forma [15] che consenta di concepirla come funzione analitica delle rimanenti $\underset{h}{T}{}^i_{.j}$ $(h \neq k)$, allora la $U^i_{.j}$ non solo non è concepibile come funzione analitica di una sola delle $T^i_{.j}$, ma nemmeno di un gruppo qualunque di esse, in numero minore di m.

Un semplicissimo esempio fisico di funzione analitica di due variabili complesse è il seguente. Sia Σ una V_2 a due facce, su ciascuna delle quali sia definito un moto fluido laminare irrotazionale e a divergenza nulla. Siano u^i e v^i i due campi vettoriali rappresentativi delle velocità assolute nei due moti considerati. Si è visto sopra che, essendo

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad} a \ , \quad \triangle_2 a = 0 \ ,$$

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} A \ , \quad \triangle_2 A = 0 \ ,$$

agli invarianti armonici a e A riescono associati, ciascuno a meno di un fattore moltiplicativo, altri due invarianti armonici b, B di guisa che

$$U^i_{.j} = a\,A^i_{.j} + b\,\varepsilon^{ih} g_{hj} \quad \text{e} \quad V^i_{.j} = A\,A^i_{.j} + B\,\varepsilon^{ih} g_{hj}$$

sono due variabili complesse definite su Σ.

La funzione analitica di $U^i_{\cdot j}$ e $V^i_{\cdot j}$, definita ponendo

$$W^i_{\cdot j} = V^i_{\cdot j} - U^i_{\cdot j}$$

rappresenta ovviamente, attraverso il vettore $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} = \text{grad}\,(A - a)$, il moto laminare *relativo* del secondo fluido rispetto al primo.

Non rientra invece come possibile nel quadro concettuale qui presentato la definizione di funzione analitica di più variabili complesse definite separatamente su diverse V_2, essendo a priori impossibile legare invariantivamente tensori di una varietà a tensori di un'altra affatto indipendente dalla prima.