PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XI - N. 17
pag. 207-218

SULLA GENERAZIONE DI VORTICI IN FLUIDI PERFETTI « NON OMOGENEI » (1) SOGGETTI A FORZE DI MASSA CONSERVATIVE (*)

(Con due figure)

LUIGI CASTOLDI

SVMMARIVM. — Perpendit Auctor quid in theorematis hydrodynamicis a LAGRANGE, THOMSON, HELMHOLTZ repertis mutandum sit, si applicari debeant ad fluentia perfecta non homogenea, quae conservativarum virium sollicitationibus obnoxia sint. Conclusiones ad nonnulla facta, quae saepe evenire solent, applicantur.

1. - Il fenomeno della formazione di vortici in seno a fluidi approssimativamente perfetti e soggetti a forze di massa conserva-

---

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giovanni Giorgi il 20 ottobre 1947.

(1) Adottiamo qui la denominazione di *omogenei* per designare quei fluidi nei quali la densità è funzione unicamente della pressione; più particolarmente si parlerà di fluidi *omogenei incomprimibili* o *comprimibili* secondochè, rispettivamente, quella funzione si riduce ad una costante oppure no. In ogni altro caso, come più dettagliatamente è indicato nel numero 1 del testo, parleremo di fluidi *non omogenei*. Abbiamo preferito queste denominazioni a quelle corrispondenti adottate, per esempio, dal BJERKNES (P. APPEL, *Traité de mécanique rationelle*, T. III, 3a ed., pag. 562) di fluidi *barotropi* (superficie isobare coincidenti con quelle di ugual densità) e di fluidi *baroclini* (in ogni caso diverso), per il fatto che, in particolari circostanze, per esempio nel caso statico, un fluido da noi definito *non omogeneo*, e fisicamente tale nell'accezione comune della tavola, in quanto, per esempio, costituito da un insieme di liquidi non mescolabili e di diversa densità naturale, si stratifica in modo che i piani orizzontali sono ad un tempo superficie isobariche e di ugual densità; il che, secondo le denominazioni citate, porterebbe a classificarlo come *barotropo*. Consegue di qui che la distinzione tra fluidi barotropi e baroclini non appare dotata di carattere intrinseco, ma legata alle particolari circostanze cinematiche in cui trovansi i fluidi in istudio.

tive([1]), quale, per esempio, si manifesta nei moti connessi a convezione termica in liquidi o aeriformi non uniformemente riscaldati, trova spiegazione non soltanto nella natura sia pur poco viscosa di tali fluidi, ma anche, e forse prevalentemente, come verrà appresso chiarito, nella loro non perfetta omogeneità. Riservandoci di tornare alla fine su questo accenno di carattere applicativo, consideriamo per ora un fluido perfetto del tutto generale, a priori comprimibile e *non omogeneo*. L'ipotesi di non omogeneità va qui intesa nel senso che, mentre si suppone che la densità ρ della generica particella dipenda esclusivamente dalla pressione locale vigente nelle successive posizioni da essa occupate, si ammette anche che, a parità di pressione, la densità del fluido possa ancora esser diversa da particella a particella. Quanto alla causa di tale inomogeneità, essa può supporsi attribuibile, o a non uniforme struttura materiale del fluido, o a disuguale temperatura delle sue particelle e alla conseguente diversa densità di esse. In quest'ultimo caso aggiungeremo peraltro l'ipotesi che la temperatura di ogni singola particella possa ritenersi costante durante il moto.

Volendo esprimere tuttociò analiticamente, indichiamo con a, b, c le coordinate, in un istante t_0, della particella occupante all'istante t la posizione x, y, z. Se allora.

$$[1] \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= x(a, b, c;\ t_0/t) \\ y &= y(a, b, c;\ t_0/t) \\ z &= z(a, b, c;\ t_0/t) \end{aligned} \right. ,$$

o, inversamente

$$[1'] \qquad \left\{ \begin{aligned} a &= a(x, y, z;\ t/t_0) \\ b &= b(x, y, z;\ t/t_0) \\ c &= c(x, y, z;\ t/t_0) \end{aligned} \right.$$

([1]) Attorno al significato del termine *forze conservative* torna qui opportuno richiamare che così si denominano correttamente tutte quelle forze che non danno luogo a migrazione o dissipazione di energia. Taluni Autori, meno propriamente, usano tale locuzione con significato più ristretto, per denotare le forze derivanti da un potenziale. Ma si noti, per esempio, che la forza trasversale (deviatrice) che agisce su un elettrone in moto in un campo magnetico non ammette potenziale, ma è conservativa, perchè non esegue lavoro. [Devo questa precisazione ad una cortese comunicazione dell'Accademico Pontificio S. E. Giovanni Giorgi, al quale sono lieto di poter qui esprimere pubblicamente la mia gratitudine].

sono le equazioni in termini finiti delle traiettorie, la non omogeneità e la comprimibilità del fluido si esprimono scrivendo che ρ è funzione del posto e del tempo, sia attraverso la pressione locale p, sia attraverso le [1']:

$$\rho = \rho[a(x, y, z;\ t/t_0),\ b(\ ),\ c(\ );\ p(x, y, z;\ t)] \ . \tag{2}$$

Premesso ciò, ci proponiamo qui di studiare a quali modificazioni vanno soggetti i noti fondamentali teoremi idrodinamici di LAGRANGE, di THOMSON, di HELMHOLTZ allorchè si lascia cadere, come si è accennato, la consueta ipotesi di omogeneità.

2. – A tale scopo, rifacciamoci all'equazione indefinita della dinamica di nn fluido prfetto:

$$\rho \frac{D\hat{v}}{Dt} = \rho\hat{F} - \nabla p \tag{3}$$

essa, nell'ipotesi, cui d'ora in poi sempre ci atterremo, di forze di massa conservative, derivanti da un potenziale U, facendo uso della nota trasformazione

$$\frac{D\hat{v}}{Dt} = \frac{\partial\hat{v}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - [\hat{v}\cdot\mathrm{curl}\,\hat{v}]_v \tag{4}$$

assume testo la forma:

$$\frac{\partial\hat{v}}{\partial t} - [\hat{v}\cdot\mathrm{curl}\,\hat{v}]_v = -\nabla\left(U + \frac{v^2}{2}\right) - \frac{1}{\rho}\nabla p \ .$$

Indicata ora con

$$\hat{\omega} = \frac{1}{2}\,\mathrm{curl}\,\hat{v} \tag{5}$$

la vorticità della generica particella, la precedente si può scrivere

$$\frac{\partial\hat{v}}{\partial t} - 2[\hat{v}\cdot\hat{\omega}]_v + \frac{p}{\rho^2}\nabla\rho = -\nabla\left(U + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right), \tag{6}$$

da cui, prendendo il rotore di entrambi i membri,

$$\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial t} = \text{curl}\,[\hat{v} \cdot \hat{\omega}]_v - \frac{1}{2}\,\text{curl}\left(\frac{p}{\rho^2}\,\nabla\rho\right) .$$

Tenuto presente poi che è

$$\text{curl}\,[\hat{v} \cdot \hat{\omega}]_v = \hat{v}\,div\,\hat{\omega} - \hat{\omega}\,div\,\hat{v} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \mathrm{P}}\,\hat{\omega} - \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial \mathrm{P}}\,\hat{v} ,$$

$$\text{curl}\left(\frac{p}{\rho^2}\,\nabla\rho\right) = \left[\nabla\,\frac{p}{\rho^2} \cdot \nabla\rho\right]_v = \frac{1}{\rho^2}\left[\nabla p \cdot \Delta\rho\right]_v ,$$

$$div\,\hat{\omega} = 0 ,$$

segue ulteriormente

$$\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial t} = \frac{\partial \hat{v}}{\partial \mathrm{P}}\,\hat{\omega} - \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial \mathrm{P}}\,\hat{v} - \hat{\omega}\,div\,\hat{v} - \frac{1}{2\rho^2}\left[\nabla p \cdot \nabla\rho\right]_v$$

o, infine, introducendo la derivata sostanziale di $\hat{\omega}$

$$\frac{\mathrm{D}\,\omega}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial \mathrm{P}}\,\hat{v} :$$

[7] $$\frac{\mathrm{D}\hat{\omega}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \hat{v}}{\partial \mathrm{P}}\,\hat{\omega} - \hat{\omega}\,div\,\hat{v} - \frac{1}{2\rho^2}\left[\nabla p \cdot \nabla\rho\right]_v .$$

Importa rilevare esplicitamente il significato del fattore $\nabla\rho$ che compare nell'ultimo termine della [7]. A tale scopo osserviamo che, essendo la densità ρ definita dalla [1], si ha:

[8] $$\nabla\rho = (\nabla\rho)_p + \frac{\partial\rho}{\partial p}\,\nabla p ,$$

dove si è espressamente indicato che ρ dipende dalle variabili spaziali sia esplicitamente ($p =$ costante) – e in tal senso è formato $(\nabla\rho)_p$ –, sia attraverso p. Tenuto conto di ciò la [7] diventa:

[9] $$\frac{\mathrm{D}\hat{\omega}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \hat{v}}{\partial \mathrm{P}}\,\hat{\omega} - \hat{\omega}\,div\,\hat{v} - \left[\frac{1}{2\rho^2}\,\nabla\rho \cdot (\nabla\rho)_p\right]_v .$$

Segue da [8] che se il fluido è omogeneo, cioè se ρ dipende da x, y, z, t esclusivamente attraverso p, è

$$(\nabla \rho)_p = 0$$

e la [9] si riduce a

$$\text{[10]} \qquad \frac{D\hat{\omega}}{Dt} = \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial P} \cdot \hat{\omega}\right)_s - \hat{\omega}\, div\, \hat{v} \ .$$

Da questa, e da quelle che se ne deducono derivando sostanzialmente rispetto a t, risulta che se in un certo istante è $\hat{\omega} = 0$ per una certa particella, per essa è sempre (prima e dopo l'istente) $\hat{\omega} = 0$. Tale è, sotto la forma « elementare » l'espressione del noto Teorema di LAGRANGE, valido, dunque, per fluidi omogenei, e del resto comprimibili o no.

Per un fluido non omogeneo, l'ultimo termine della [9] non si annulla generalmente; onde l'annullarsi di $\hat{\omega}$ in un certo istante e per una certa particella, non implica l'annullarsi di $\dfrac{D\hat{\omega}}{Dt}$ nè delle derivate successive. Cosicchè l'istante stesso è preceduto e seguito da intervalli di tempo in cui la vorticità della particella non si annulla. Il Teorema di LAGRANGE non sussiste dunque nel caso generale.

3. – Il risultato conseguito si precisa e si completa, considerando in seno al fluido una generica linea chiusa sostanziale C, concepita cioè come mobile in modo da riuscir sempre formata dalle medesime particelle che la compongono in un arbitrario istante assunto come iniziale. Indicando con I la circolazione della velocità lungo di essa:

$$\text{[11]} \qquad I = \left(\int_C \hat{v} \cdot dP\right)_s$$

si ha anche, per il teorema di STOKES:

$$\text{[12]} \qquad I = \iint_\sigma (\text{curl}\ \hat{v} \cdot d^2\,\hat{\sigma})_s = 2 \iint_\sigma (\hat{\omega} \cdot d^2\,\sigma)_s \ ,$$

dove σ è una qualunque superficie appartenente per intero al campo occupato dal fluido e avente per contorno C, ed $\vec{n}$ la sua normale positiva rispetto a un verso prefissato su C.

Facendo poi uso di una nota espressione della derivata sostanziale di un integrale di superficie, si ottiene da [12]:

$$\frac{\mathrm{D\,I}}{\mathrm{D}t} = 2\iint_\sigma \left(\left\{ \frac{\partial \widehat{\omega}}{\partial t} + \widehat{v}\, div\, \widehat{\omega} + \mathrm{curl}\,[\widehat{\omega} \cdot \widehat{v}]_v \right\} \cdot d^2\widehat{\sigma} \right)_s =$$

$$= 2\iint_\sigma \left(\left\{ \frac{\mathrm{D}\widehat{\omega}}{\mathrm{D}t} + \widehat{\omega}\, div\, \widehat{v} - \frac{\partial \widehat{v}}{\partial \mathrm{D}}\, \widehat{\omega} \right\} \cdot d^2\widehat{\sigma} \right)_s$$

ossia, tenuto conto di [9],

$$[13] \qquad \frac{\mathrm{D\,I}}{\mathrm{D}t} = \iint_\sigma \left(\frac{1}{\rho^2} [(\nabla\rho)_p \cdot \nabla p]_v \cdot d^2\widehat{\sigma} \right)_s = \int_{\mathrm{C}} \frac{1}{\rho^2} \Big([(\nabla\rho)_p \cdot \nabla p]_v \cdot d\,\mathrm{P} \Big)_s ,$$

relazione che mette in luce il significato cinematico dell'ultimo termine della [9], come quello cui è dovuta, indipendentemente dalla eventuale comprimibilità del fluido, la variazione nel tempo della circolazione di $\vec{v}$ lungo una qualunque linea sostanziale chiusa.

Risulta da [13] che anche il noto Teorema di Thomson, affermante l'invarianza temporale di tale circolazione, e valido per fluidi omogenei comprimibili o no, non sussiste, in generale, nell'ipotesi più ampia di inomogeneità.

Va osservato peraltro che, per particolari linee sostanziali chiuse tracciate nel fluido, può bensì riuscir nullo il secondo membro di [13], e che pertanto, per esse, continuerà eccezionalmente a valere la proposizione di Thomson. Una classe notevole di linee per cui tale circostanza certamente si verifica è quella delle linee tracciate sulle superficie $(\rho)_p =$ costante, intendendo per tali le superficie sostanziali definite come luoghi di particelle la cui densità, a parità di pressione, è costante.

Nel seguito chiameremo, per brevità, tali superficie e le linee sostanziali tracciate su esse, rispettivamente *superficie e linee di* Thomson.

4. - Dalle ultime considerazioni possono trarsi alcune notevoli proprietà geometriche del moto di un fluido non omogeneo. Ma per far ciò occorre ancora accertarsi delle condizioni sotto cui sussiste il noto (primo) Teorema di HELMHOLTZ sulla sostanzialità delle linee di vortice.

A tale scopo consideriamo, in un istante generico t, due particelle P e $P_1 = P + \varepsilon\hat{\omega}$ infinitamente vicine e situate su una medesima linea di vortice. Indicando con $\hat{v}$ e con $\hat{v}_1$ le attuali velocità di P e P_1, è $\hat{v}_1 = \hat{v} + \varepsilon \frac{\partial \hat{v}}{\partial P} \hat{\omega}$. Ne segue che, in capo a un intervallo infinitesimo di tempo dt, le posizioni rispettivamente assunte dalle due particelle saranno:

$$P' = P + \hat{v}\,dt \;; \quad P'_1 = P + \varepsilon\hat{\omega} + \left(\hat{v} + \varepsilon \frac{\partial \hat{v}}{\partial P} \hat{\omega}\right) dt \,,$$

e la loro distanza, vettorialmente espressa:

$$P'_1 - P' = \varepsilon\left(\hat{\omega} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial P} \hat{\omega}\right) dt \,,$$

ossia, in virtù di [9]:

$$[14] \qquad P'_1 - P' = \varepsilon \left\{ \hat{\omega} + \frac{D\hat{\omega}}{Dt} + \hat{\omega}\, div\, \hat{v} + \frac{1}{2\rho^2}\left[\nabla p \cdot (\nabla \rho)_v\right]_v \right\} dt \,.$$

Risulta di qui che, a meno che il fluido non sia insieme omogeneo e imcomprimibile, le particelle P e P_1 non si mantengono durante il moto sopra una medesima linea di vortice. A questo caso particolare (liquido omogeneo) rimane dunque limitata la validità del citato Teorema di HELMHOLTZ.

5. - Premesso ciò ricordiamo che, per un fluido omogeneo e incomprimibile, il carattere sostanziale delle linee di vortice, unitamente alla conservazione della circolazione secondo l'enunciato di THOMSON implica, con ovvia argomentazione la corrispondente sostanzialità dei tubi di vortici nonchè l'invarianza della loro *intensità* (secondo Teorema di HELMHOLTZ).

Per un moto fluido omogeneo e comprimibile, venendo meno il carattere sostanziale delle linee di vortice e pur sussistendo la proposizione di THOMSON, il secondo Teorema di HELMHOLTZ risulta alquanto modificato. Sia infatti Σ_0 un tubo di vortici relativo all'istante t_0 e C_0 una qualunque linea sostanziale chiusa giacente su esso. Se Σ, in un successivo istante t, è la superficie tubolare proveniente da Σ_0 per deformazione sostanziale e C la attuale configurazione su essa della linea sostanziale proveniente da C_0, l'invarianza della circolazione nel passaggio da C_0 a C, unitamente all'arbitrarietà di C_0 (in particolare: circolazione nulla per tutte le C_0 non abbraccianti Σ_0 e per le loro

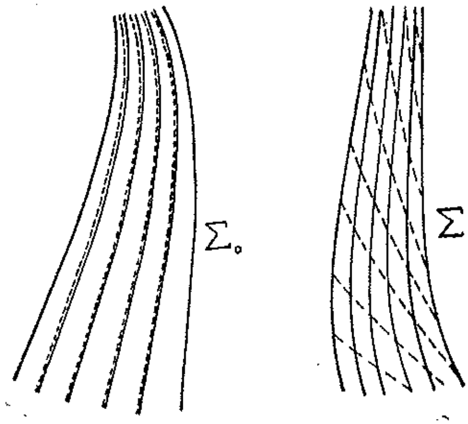

FIG. 1.

trasformate) permette di affermare che Σ è tutt'ora un tubo di vortici (con intensità inalterata). La comprimibilità supposta del fluido ha soltanto per effetto che le linee sostanziali l_0 che all'istante t_0 coincidevano su Σ_0 colle relative linee di vortice, all'istante t generalmente ne diversificano, pur potendo, sia le une che le altre, nel medesimo istante concepirsi come generatrici di Σ. Per chiarir ciò, nella figura 1, si sono disegnate, su Σ_0 e su Σ, con tratto continuo le linee sostanziali l_0 ed l, e punteggiate le linee di vortice.

Concludendo, nel caso presente, i tubi di vortici possono dunque definirsi come superficie sostanziali generate da vortici non sostanziali.

Nel caso più generale di un fluido non omogeneo e comprimibile viene anche a mancare, come tosto si riconosce, la sostanzialità delle superficie tubolari di vortici. Sia ancora infatti C_0 una linea sostanziale chiusa, direttrice, all'istante t_0 di un tubo di vortici Σ_0 e siano rispettivamente L_0 ed l_0 la linea di vortice e la linea sostanziale, attualmente coincidente con essa, uscenti da un suo generico punto P_0. In un'istante successivo t, la linea sostanziale C_0 avrà assunto una configurazione C e il punto P_0 una posizione P su di essa, mentre L_0 ed l_0 avranno dato luogo a due linee L ed l (la prima, attuale linea di vortice uscente da P; la seconda, trasformata sostanziale di l_0) generalmente fra loro distinte.

Complessivamente, la linea C riuscirà, ad un tempo, direttrice di un tubo di vortici Σ (relativo all'istante t e alla direttrice C) e di un

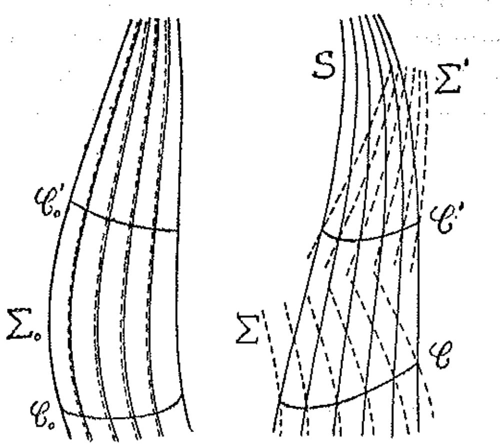

Fig. 2.

tubo di linee sostanziali S (trasformato sostanziale di Σ_0), i quali, venuta meno nel caso presente la proposizione di invarianza di Thomson, si manifestano generalmente fra loro distinti. A chiarimento di ciò, nella figura 2 si sono disegnate su Σ_0 due direttrici C_0 e C'_0, e, su S le rispettive trasformate sostanziali C e C'.

Va ancora notato che il flusso di vortici attraverso C e caratteristico all'intero tubo Σ (intensità di Σ) è generalmente diverso dall'analogo flusso attraverso C_0 e caratteristico di Σ_0; e che d'altra parte, il flusso in questione attraverso una linea generica giacente su S e abbracciante S una volta è generalmente diverso da linea a linea, non essendo S un tubo di vortici.

Un comportamento eccezionale presentano le linee di THOMSON introdotte nel numero 4. Se G_0 è una di esse relativa all'istante t_0 e G la sua trasformata sostanziale all'istante t, non solo il flusso di vortici attraverso G, e caratteristico di Σ, coincide con quello attraverso G_0 e caratteristico di Σ_0, ma altresì è lo stesso per tutte le eventuali linee di THOMSON situate su S e provenienti da analoghe situate su Σ_0. Risultato questo, che, nonostante qualche apparenza, non contraddice affatto quello ottenuto nel precedente capoverso.

6. UNA APPLICAZIONE. – Consideriamo un recipiente, per esempio cilindrico, superiormente aperto e ad asse verticale, contenente un liquido pesante che supporremo, almeno approssimativamente, perfetto e inizialmente omogeneo. Se indichiamo con Z la quota contata verso l'alto a partire dal fondo del recipiente, è possibile immaginare un dispositivo di riscaldamento dal basso, per effetto del quale, in capo a un tempo sufficientemente lungo, si stabilisca nel liquido una distribuzione di temperatura per cui, senza peraltro provocare – in virtù di opportune cautele – moto alcuno nel liquido, la densità risulti funzione crescente di Z. L'attuale stato di equilibrio, contrariamente a quello iniziale, ha però manifesto carattere di instabilità: una sia pur lieve perturbazione nella distribuzione della temperatura, per cui le superficie isotermiche cessino di essere perfettamente orizzontali, rende impossibile l'ulteriore sussistere dell'equilibrio del liquido, provocandone un moto d'insieme che lo porterà, in un tempo che possiamo supporre abbastanza breve perchè il fenomeno possa considerarsi adiabatico, ad una nuova distribuzione di equilibrio con densità crescente in verso opposto alla quota [1]. All'istante t_0 in cui il liquido, per effetto della perturbazione accennata, abbandona il precedente stato di equilibrio instabile, le superficie isobariche hanno, necessariamente, diversa configurazione da quelle isotermiche; onde, nell'istante considerato, sarà certo, in qualche parte del liquido, $[\nabla p \cdot (\nabla \rho)_p]_v$ diverso

[1] L'ipotesi di adiabaticità, unitamente a quella generica di incomprimibilità di un liquido, è necessaria se si vuole che siano verificate le condizioni enunciate nel numero 1.

da zero. Poichè inoltre in t_0 è dappertutto $\hat{\omega} = 0$, la [9] fornisce per $\frac{D\hat{\omega}}{Dt}$ un valore non nullo.

Il moto descritto, che porta il liquido nella nuova configurazione di equilibrio, avviene dunque con formazione di vortici.

Non diversamente sembra possa spiegarsi la formazione di vorticità nei moti persistenti di convezione termica che si stabiliscono, come si è accennato al principio, in liquidi e aeriformi (per esempio nell'aria atmosferica) mantenuti nelle loro parti a temperature diverse.