PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XI - N. 5
pag. 63-70

FORZE D'INERZIA NEI SISTEMI LAGRANGIANI E LORO CARATTERE CONSERVATIVO IN TALUNI CASI PARTICOLARI (*)

LUIGI CASTOLDI

SVMMARIVM. — Ostendit Auctor virium inertiae proprietatem conservationis sub condicionibus opportune vinculis impositis.

1. - Il carattere di dipendenza dal sistema di riferimento della nozione di *forza* risulta, nel caso di un punto materiale libero e di riferimenti cartesiani, dal teorema elementare di CORIOLIS esprimentesi; con notissimo significato dei simboli nella relazione

$$\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{a}_a - \boldsymbol{a}_\tau - 2\boldsymbol{a}_c \tag{1}$$

tra le accelerazioni assoluta, relativa, di trascinamento e complementare. Questa, infatti, si traduce in una analoga relazione tra le forze:

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_a - \mathbf{F}_\tau - 2\mathbf{F}_c \ , \tag{2}$$

dove i termini

$$-\mathbf{F}_\tau - 2\mathbf{F}_c$$

costituiscono complessivamente le cosidette *forze deinerzia.*

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giovanni Giorgi il 26 aprile 1947.

Ci proponiamo qui, dapprima, di mostrare che un analogo carattere di dipendenza dal sistema di coordinate di riferimento appartiene alle forze attive applicate a un generico sistema dinamico soggetto a vincoli olonomi senza attrito, dipendenti o meno dal tempo; e ciò in conseguenza della struttura stessa delle equazioni dinamiche lagrangiane (1). Riconosceremo poi che, in particolari condizioni di vincolo e di riferimento, le *forze d'inerzia generalizzate* cui così si perviene, presentato in un senso da definirsi *lato*, carattere conservativo.

2. – Ricordiamo infatti che denotando con $q_h (h=1, 2, ..., n)$ coordinate lagrangiane indipendenti caratterizzanti le possibili configurazioni del sistema olonomo considerato e con Q_h le rispettive componenti delle forze attive, l'energia cinetica del sistema assume la forma:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{hk} A_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k + \sum_h A_h \dot{q}_h + \frac{1}{2} A_0 \ , \tag{3}$$

dove le A_{hk}, le A_h ed A_0 sono quantità note, funzioni generalmente delle q_h e del tempo t. Le A_h ed A_0 si annullano notoriamente allorchè i vincoli applicati al sistema sono indipendenti dal tempo (o non esistono affatto), sotto l'ulteriore condizione che le coordinate q_h abbiano carattere *solidale* rispetto a tali vincoli fissi; intendendo con ciò che la definizione delle q_h è di tal natura che ad una determinata configurazione del sistema corrisponde un insieme temporalmente invariabile di valori delle q_h (2).

Le corrispondenti equazioni lagrangiane

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \qquad (j=1, 2, ... n) \ , \tag{4}$$

scritte sotto la forma esplicita cui si perviene tenendo conto di [3], assumono l'aspetto:

$$\sum_k A_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{lk} [lk, j] \dot{q}_l \dot{q}_k + \sum_k w_{kj} \dot{q}_k + \frac{\partial A_j}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial A_0}{\partial q_j} = Q_j \tag{5}$$

(1) Sotto ipotesi più restrittive sulla natura dei vincoli, l'osservazione del testo trovasi anche, per es., in P. Frank und R. v. Mises, *Die Differential-und Integral gleichungen der Mechanik und Physik.* Vol. II, pagg. 52-55.

(2) Diversamente, pur con vincoli fissi (o in assenza di essi), il secondo membro della [4] *non* si riduce a forma omogenea.

dove si è posto:

[6] $$[lk, j] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_{jk}}{\partial q_l} + \frac{\partial A_{je}}{\partial q_k} - \frac{\partial A_{lk}}{\partial q_j}\right)$$

e

[6′] $$w_{kj} = \frac{\partial A_j}{\partial q_k} - \frac{\partial A_k}{\partial q_j} + \frac{\partial A_{jk}}{\partial t} \; .$$

Nel caso di vincoli fissi e di un riferimento solidale le [5] si riducono a

[5′] $$\sum_k A_{jk}\,\ddot{q}_k + \sum_{lk}\,[lk, j]\,\dot{q}_l\,\dot{q}_j = Q_j \, ,$$

dove le A_{jk} e le $[lk, j]$ sono attualmente indipendenti dal tempo. Ma anche nel caso di vincoli e di riferimenti qualunque è possibile dare alle [5] la forma [5′] purchè si annoverino tra le forze applicate i termini

[7] $$\Phi_j = -\sum_k w_{kj}\,\dot{q}_k - \frac{\partial A_j}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial A_0}{\partial q_j} \; .$$

Posto infatti

[8] $$Q_j^{(r)} = Q_j - \frac{\partial A_j}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial A_0}{\partial q_j} - \sum_k w_{kj}\,\dot{q}_k \; ,$$

le [5] assumono la forma:

[9] $$\sum_k A_{jk}\,\ddot{q}_k + \sum_{lk}\,[lk, j]\,\dot{q}_l\,\dot{q}_k = Q_j^{(r)} \; .$$

È evidente l'analogia formale tra le [2] e le [8], ed è ovvio interpretare in quest'ultime, rispettivamente i primi membri e i termini $-\frac{\partial A_j}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial A_0}{\partial q_j}$, $\sum_k w_{kj}\dot{q}_k$ come forze relative al riferimento q_h, di trascinamento, e complementari; complessivamente, le quantirà [7] come *forze d'inerzia.*

L'unica differenza tra le [5] e le [9] consiste nell'indipendenza delle quantità a_{jk} e $[lk, j]$ dal tempo, che sussiste per le prime e, in generale, non per le seconde.

D'altra parte importa qui rilevare, per quanto si dirà in seguito attorno alla natura delle forze d'inerzia in questo caso particolare, che esistono vincoli (sia fissi che mobili, o, in particolare del tutto assenti) e, con essi, particolari sistemi di coordinate lagrangiane, per cui si verifica la circostanza che, nelle corrispondenti equazioni [9] le A_{jk} e (quindi) le $[lk, j]$ risultano esplicitamente indipendenti dal tempo. In tal caso le [5] e le [9] si identificano, per quanto riguarda la loro struttura, completamente, salvo il diverso significato di forze assolute (nelle [5]) e relative (nelle [9]) dei secondi membri.

Come esempio di riferimento mobile in assenza di vincoli, per cui si verifica la circostanza accennata, si consideri, per un punto materiale, quello costituito da una terna cartesiana ortogonale $O\xi\eta\zeta$ uniformemente rotante con velocità angolare ω relativamente ad una terna di uguale origine $Oxyz$ ritenuta fissa, essendo asse di rotazione l'asse $O\zeta$ coincidente con Oz. Si ha infatti allora:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) =$$

$$= \frac{1}{2} m \left[\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 + 2\omega(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) + \omega^2(\xi^2 + \eta^2)\right] .$$

Come esempio, ancora per un punto materiale, di vincolo mobile, e, con esso, di conveniente scelta di coordinate, per cui ancora sussiste la proprietà accennata, si consideri quello costituito da una circonferenza in piano fisso e centro fisso, il cui raggio, partendo da un valore iniziale r_0, cresca linearmente col tempo:

$$r = kt + r_0 .$$

Assumendo come parametro l'arco s contato da un punto A della circonferenza scelto istante per istante in modo che il raggio OA mantenga direzione fissa nel piano, si ha infatti:

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m\left[\dot{s}^2 - 2\frac{ks}{r}\dot{s} + k^2\left(1 + \frac{s^2}{r^2}\right)\right] .$$

3. — Riprendendo in generale l'espressione [7] delle forze d'inerzia, nasce spontanea la questione se esse possano presentare carattere conservativo.

Poichè i primi termini delle [7] dipendono dalle $\dot{q}_h$, il problema va naturalmente posto attribuendo alla nozione di forza conservativa non il significato ristretto che solitamente si dà a questa denominazione, ma quello più ampio secondo cui una forza si definisce conservativa allorchè esiste una funzione (potenziale generalizzato) $V(q_h, \dot{q}_h, t)$ degli argomenti indicati per cui le componenti F_j della forza in questione possono mettersi sotto la forma

$$F_j = \frac{\partial V}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}\right). \tag{10}$$

La [10] è l'espressione più generale di cui sono suscettibili le componenti lagrangiane delle forze attive compatibilmente alla condizione che introdotta una *funzione lagrangiana*

$$L = T + V,$$

sia possibile attribuire alle equazioni dinamiche [4] la forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 .$$

Per distinguere, attribuiremo a forze del tipo [10] la denominazione di *forze conservative in senso lato* o *derivanti da un potenziale generalizzato.*

Le condizioni generali affinchè una forza di assegnate componenti lagrangiane F_h possa derivarsi da un potenziale generalizzato sono state date da HELMHOLTZ (1) e MEYER (2) e, limitatamente al caso di forze dipendenti soltanto dalle derivate prime delle q_h (oltrechè naturalmente dalle q_h e da t), dal RACAH (3). Con riferimento a quest'ul-

(1) H. HELMHOLTZ, «Journal f. Math.» (1886).

(2) A. MEYER, «Leipziger Berichte» (1896).

(3) G. RACAH, «Atti lincei» (1937), vol. XXV, pag. 223. Forze del tipo [10] si prestano anche ad una trattazione quantica, come è stato rilevato dal CALDIROLA, «Rend. Ist. Lombardo» (1939), vol. 72, pag. 379 e, per estensioni: «Nuovo cimento» (1941), pag. 393.

timo caso che, solo, attualmente ci interessa data la forma delle forze [7], tali condizioni sono:

1°) che le F_j siano lineari nelle $\dot{q}_h$, cioè della forma

$$F_j = \sum_k c_{jk}\dot{q}_k + c_j \ , \tag{11}$$

colle c_{jk} e c_j funzioni soltanto delle q_h e di t;

2°) che le c_{jk} le c_j verifichino le condizioni

$$c_{jk} = - c_{kj} \ , \tag{12}$$

$$\frac{\partial c_{jk}}{\partial q_l} + \frac{\partial c_{kl}}{\partial q_j} + \frac{\partial c_{lj}}{\partial q_k} = 0 \ , \tag{13}$$

$$\frac{\partial c_{jk}}{\partial t} + \frac{\partial c_k}{\partial q_j} - \frac{\partial c_j}{\partial q_k} = 0 \ . \tag{14}$$

È anche dovuto al Racah (nota ([3]), pag. 225) il riconoscimento che, nel caso di una sola particella materiale libera, le uniche forze soddisfacenti alle condizioni [11], [12], [13], [14] sono del tipo di Lorentz, cioè, sotto forma vettoriale, del tipo:

$$\mathbf{F} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\,\mathrm{V}\,\boldsymbol{v}\mathbf{B}\right)$$

dove $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ sono vettori soddisfacenti le equazioni:

$$\begin{cases} \operatorname{div}\ \mathbf{B} = 0 \\ \operatorname{curl}\mathbf{E} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \ , \end{cases} \tag{16}$$

$\boldsymbol{v}$ è la velocità della particella ed e e c sono costanti scalari. Ciò può formalmente interpretarsi dicendo che le forze del tipo ora considerato possono sempre assimilarsi a quelle che la particella in questione subirebbe qualora fosse dotata di una conveniente carica elettrica ed immersa in un opportuno campo elettrico e magnetico.

4. – Premesso ciò non è difficile verificare che le forze d'inerzia introdotte colle [7] del n. 2 soddisfano a tutte le condizioni [11]-[14] sotto la sola restrizione di indipendenza esplicita dal tempo delle A_{jk}.

Abbiamo dunque il risultato:

« Le forze d'inerzia cui è soggetto un sistema dinamico a vincoli olonomi lisci per cui sia possibile un riferimento a coordinate lagrangiane verificanti la relazione

$$[17] \qquad \frac{\partial A_{jk}}{\partial t} = 0 \, ,$$

sono conservative in senso lato ».

Con riguardo al risultato particolare del RACAH, citato alla fine del n. 3, possiamo anche dire che:

« Le foze d'inerzia cui è soggetto un punto materiale libero riferito a un sistema di coordinate soddisfacente la condizione [15] sono forze del tipo di LORENTZ ».

Nel caso considerato come primo esempio nel n. 2, con riferimento alla [7], si ha

$$\Phi_\xi = 2m\omega\dot{\eta} + m\omega^2\xi \, ; \quad \Phi_\eta = -2m\omega\dot{\xi} + m\omega^2\eta \, ; \quad \Phi_\zeta = 0 \quad ,$$

da cui, per confronto colla [15], e indicando con $\boldsymbol{k}$ il versore dell'asse fisso $O\zeta = Oz$, risulta:

$$[18] \qquad \begin{cases} \mathbf{E} = \dfrac{m}{e}\,\omega^2(P - Q) \\[2ex] \mathbf{B} = \dfrac{mc}{e}\,\omega\boldsymbol{k} \end{cases} \quad ,$$

dove Q è la proiezione ortogonale di P sull'asse Oz.

Le [18], una volta scelti, in modo del resto arbitrario, i valori delle costanti c ed e, determinano univocamente i vettori E e B, ed è facile verificare che per essi risultano senz'altro soddisfatte le condizioni [16].