PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XI - N. 6
pag. 71-78

CONTRIBUTO AD UNA TEORIA GENERALE DEGLI OPERATORI (*)

GINO ARRIGHI

SVMMARIVM. — Generalem doctrinam de operatoribus Auctor delibat, de inversionis problemate speciatim tractans.

§ 1. - L'uso degli operatori trova amplissimo ufficio nelle matematiche e nella tecnica: proiettività, omografie vettoriali, matrici e gli operatori funzionali introdotti da GIORGI; ma riteniamo che il loro uso sia di non trascurabile apporto ad altre scienze come pure alla *logica* dove le applicazioni di queste ricerche saranno in prosiego mostrate.

Pertanto siamo venuti nella considerazione della oppurtunità di una teoria generale degli operatori alla quale, con questo scritto, intendiamo portare un, sia pur lieve, contributo.

In queste pagine, definiti gli operatori, vengono trattati i loro prodotti ordinati e le simmetrie il cui calcolo presenta forti analogie formali con quello delle radici ennesime dell'unità.

Successivamente si passa ad analizzare, dettagliatamente e per gradi successivi, l'importante problema della inversione degli operatori.

§ 2. - Diremo *operatore* applicabile ad un ente, un complesso di operazioni effettuabile sopra l'ente stesso. Indicando brevemente con α un operatore, la totalità degli enti cui α è applicabile sarà indicata con C_α e verrà detta *campo di applicabilità* di α.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giovanni Giorgi il 27 aprile 1947.

Se x appartiene a C_α ed y è l'ente cui si perviene applicando α ad x scriveremo brevemente $y=\alpha x$. Se, per tutti gli enti x, appartenenti ad un campo C, si ha $\alpha x = x$ diremo che α è *identità* in C, ovvero è $\alpha = I$ in C.

Se y, fornito dalla $y=\alpha x$, appartiene al campo C_β di applicabilità di un altro operatore β potrà ulteriormente aversi $z=\beta y=\beta(\alpha x)$ e scriveremo anche $z=(\beta\alpha)x=\beta\alpha x$ dove è pure posto in evidenza l'operatore $\beta\alpha$ (*prodotto ordinato* degli operatori α e β) che applicato ad x fornisce z e il cui campo di applicabilità $C_{\beta\alpha}$ è contenuto in C_α o, al più, coincide con esso. In tali ipotesi β è da riguardarsi come operatore che trasforma α in $\beta\alpha$.

In guisa analoga, quando siano verificate le condizioni per ulteriori applicabilità, potrà defiinrsi il prodotto ordinato degli operatori α, β, γ mediante la $(\gamma\beta\alpha)x=\gamma[\beta(\alpha x)]$ che scriveremo pure $\gamma\beta\alpha x$. Così, similmente, pei prodotti ordinati di più di tre operatori.

Verificate le condizioni per le ulteriori applicabilità, potremo definire, le *potenze* con esponente intero non negativo degli operatori, mediante la legge: $\alpha^0 = I$, $\alpha^{m+1}=\alpha\alpha^n$ (con $n=0, 1, 2...$).

Si avrà allora conseguentemente

[1] $$(\beta\alpha)^2=\beta\alpha\,\beta\alpha\ ,\quad (\beta\alpha)^3=\beta\alpha\,\beta\alpha\,\beta\alpha\ ,\quad \text{ecc.}$$
$$\alpha^m\,\alpha^n=\alpha^{m+n}\ ,\quad (\alpha^m)^n=\alpha^{mn}\quad (\text{con } m, n \text{ interi non negativi}).$$

Un operatore γ sarà detto *riflessivo* in un campo C se, per tutti gli enti x di C, γx appartiene ancora a C, allora ciò accadrà anche per $\gamma^r x$ (con r intero non negativo qualunque).

Due operatori α e β saranno detti *commutabiti* in un campo C se, per tutti gli enti x di C, è $\beta\alpha x=\alpha\beta x$.

TEOREMA I. - Se α e β sono operatori commutabili in C ed ivi riflessivi si ha in C: $(\beta\alpha)^n=(\alpha\beta)^n=\beta^n\alpha^n=\alpha^n\beta^n$ (con n intero non negativo qualunque).

Infatti, per ipotesi, l'operatore $(\beta\alpha)^n$ potrà applicarsi agli enti di C ed inoltre dallo sviluppo, secondo le [1], si otterranno le ulteriori sue forme date nell'enunciato mediante successivi scambi.

Se per $\bar{x}$ appartenente a C_α, con α non identità, risulta $\alpha\bar{x}=\bar{x}$ diremo che l'ente $\bar{x}$ è *unito* rispetto ad α. Se β è commutabile con α

in un campo C cui appartiene $\bar{x}$, avremo $\alpha\beta\bar{x}=\beta\alpha\bar{x}=\beta\bar{x}$ ciò che prova essere unito, rispetto ad α, anche $\beta\bar{x}$. Se, permanendo le ipotesi precedenti, gli operatori α e β sono altresì riflessivi in C sarà $\alpha^r\bar{x}=\bar{x}$ (con r intero non negativo qualunque) e quindi $\alpha^r\beta^s\bar{x}=\beta^s\alpha^r=\beta^s\bar{x}$ (con s intero non negativo qualunque); cioè $\beta^s\bar{x}$ è ancora unito rispetto ad α^r.

§ 3. - Un operatore ε sarà detto *simmetria di ordine n* (con n intero non negativo) in un campo C se ε è ivi riflessivo e se in C è $\varepsilon^n=\mathrm{I}$. La identità è simmetria di qualunque ordine in tutti i campi. Una simmetria di ordine n in C sarà detta *primitiva* se per m intero positivo qualunque minore di n è in genenerale $\varepsilon^m \neq \mathrm{I}$.

Teorema II. - Se ε è simmetria primitiva di ordine n in C, gli operatori ε^r(con $r=0,1,2,\ldots,n-1$) sono simmetrie di ordine n in C diverse fra loro.

Infatti è $(\varepsilon^r)^n=(\varepsilon^n)^r=\mathrm{I}$. Inoltre le n simmetrie che così si ottengono, cioè le $\mathrm{I}, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}$, sono tutte diverse fra loro giacchè se fosse $\varepsilon^{r_1}=\varepsilon^{r_2}$ (con $r_1<r_2<n$), applicando ε^{n-r_2} ad ambo i membri di questa, si avrebbe $\varepsilon^{n-r_2+r_1}=\varepsilon^{n-r_2+r_2}=\mathrm{I}$; ma essendo $n-r_2+r_1<n$ seguirebbe che la ε non sarebbe più primitiva contrariamente alla ipotesi.

Dando ad r valori interi qualunque successivi ad $n-1$ ritroviamo simmetrie del gruppo sopra scritto; ad esempio si ha: $\varepsilon^{n+2}=\varepsilon^n\varepsilon^2=\varepsilon^2$. Se l'operazione indicata nel teorema II fosse stata eseguita sopra una simmetria non primitiva ma tale che $\varepsilon^m=\mathrm{I}$ (essendo m il minore numero intero positivo per cui questa eguaglianza è generalmente verificata) avremmo ottenuto un gruppo di sole m simmetrie diverse: $\mathrm{I}, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{m+1}$.

Teorema III. - Se ε è simmetria di ordine 3 in C ed è $\varepsilon \neq \mathrm{I}$, essa è primitiva.

Infatti se fosse $\varepsilon^2=\mathrm{I}$, dalle $\varepsilon^3=\varepsilon$ ed $\varepsilon^3=\mathrm{I}$, discenderebbe $\varepsilon=\mathrm{I}$ contrariamente alla ipotesi.

Teorema IV. - Se ε_1 e ε_2 sono simmetrie commutabili di ordine, rispettivamente, m_1 e m_2 in C, il loro prodotto è simmetria in C di ordine eguale al minimo comune multiplo di m_1 e m_2.

Infatti detto m il minimo comune multiplo indicato e posto $m = m_1 p = m_2 q$, si ha $(\varepsilon_1^{m_1})^p (\varepsilon_2^{m_2})^q = \mathrm{I}$ donde segue $\varepsilon_1^m \varepsilon_2^m = \mathrm{I}$ e, in virtù del teorema I, $(\varepsilon_1 \varepsilon_2)^m = \mathrm{I}$, c. v. d.

Teorema V. – Se in tutto un campo C sono commutabili la simmetria ε primitiva di ordine n e l'operatore α riflessivo in C, si ha in C: $(\alpha \varepsilon^r)^n = \alpha^n$ (con $r = 0, 1, 2, \ldots, n-1$) e gli operatori $\alpha \varepsilon^r$ sono fra loro diversi.

Ciò segue immediatamente dai teoremi I e II.

Dando ad r valori interi qualunque successivi ad $n-1$ ritroviamo operatori del gruppo ora considerato. Se l'operazione indicata nel teorema V fosse stata eseguita con una simmetria non primitiva avremmo ottenuto un gruppo di minor numero di operatori diversi.

§ 4. – Teorema VI. – Se $\beta\alpha x$ appartiene a C_α, αx appartiene a $C_{\alpha\beta}$.

Infatti applicando α a $\beta\alpha x$, il che è lecito per ipotesi, si ha $\alpha\beta\alpha x = \alpha\beta(\alpha x)$, c. v. d. Analogamente si proverebbe che

Teorema VII. – Se $\alpha\beta x$ appartiene a C_β, βx appartiene a $C_{\beta\alpha}$.

Indichiamo ora con $C^*_{\beta\alpha}$ il campo (quando esista) contenuto in $C_{\beta\alpha}$ o, al più, coincidente con esso e tale che per ogni ente u appartenente ad esso si abbia $\beta\alpha u = u$; in tal caso diremo che β è *inverso* di α in $C^*_{\beta\alpha}$, ovvero che è $\beta\alpha = \mathrm{I}$ per tutti gli u di $C^*_{\beta\alpha}$. Anologamente, indicheremo con $C^*_{\alpha\beta}$ il campo (quando esista) contenuto in C_α o, al più, coincidente con esso e tale che per ogni ente v appartenente ad esso si abbia $\alpha\beta v = v$; in tal caso diremo che α è inverso di β in $C^*_{\alpha\beta}$, ovvero che è $\alpha\beta = \mathrm{I}$ per tutti gli enti v di $C^*_{\alpha\beta}$. Se $C^*_{\beta\alpha} \equiv C_{\beta\alpha}$ diremo che β è inverso di α per tutti gli enti cui è applicabile $\beta\alpha$; e se $C^*_{\beta\alpha} \equiv C_{\alpha\beta}$ diremo che che α è inverso di β per tutti gli enti cui è applicabile $\alpha\beta$. Se $C^*_{\beta\alpha} \equiv C_\alpha$ diremo che β è *ovunque inverso* di α, e se $C^*_{\alpha\beta} \equiv C_\beta$ sarà α ovunque inverso di β.

Teorema VIII. – Quando esiste il campo $C^*_{\beta\alpha}$ ogni ente u del quale verifica la $\beta\alpha u = u$, esiste altresì il campo $C^*_{\alpha\beta}$ ogni ente v del quale verifica la $\alpha\beta v = v$. Inoltre: per ogni u si ha un v tale che $\beta v = u$, per ogni v si ha un u tale che $\alpha u = v$.

Infatti, applicando α ad ambo i membri della $u = \beta\alpha u$, si ha $\alpha u = \alpha\beta\alpha u = \alpha\beta(\alpha u)$ la quale ci prova che per tutti gli αu è $\alpha\beta = I$ e quindi il campo $C^*_{\alpha\beta}$ esiste. Inoltre scelto un $\bar{u}$ qualunque in $C^*_{\beta\alpha}$ diciamo v_1 l'ente di $C^*_{\alpha\beta}$ concidente con $\alpha\bar{u}$ cioè $v_1 = \alpha\bar{u}$, applicando β ad ambo i membri di questa si ha $\beta v_1 = \bar{u}$, c. v. d.; analogamente si prova il rimanente.

Due elementi u e v legati fra loro dalla $\beta v = u$ [o dalla $\alpha u = v$ che fa lo stesso] saranno detti *corrispondenti* e allora il teorema precedente potrà anche annunciarsi al modo seguente

Teorema VIII *bis*. - La identità di $\beta\alpha$ in un campo porta di conseguenza la identità di $\alpha\beta$ in un altro e i due campi sono costituiti da elementi corrispondenti.

Da quanto sopra, con n intero positivo qualunque, discende

$$u = (\beta\alpha)^n u = \beta(\alpha\beta)^{n-1}\alpha u = \beta(\alpha\beta)^{n-1}v \ , \quad v = (\alpha\beta)^n v = \alpha(\beta\alpha)^{n-1}\beta v = \alpha(\beta\alpha)^{n-1}u.$$

Nelle ipotesi superiori, se γ è riflessivo in $C^*_{\beta\alpha}$, si avrà $\gamma^{r+s}u = \gamma^r\beta\alpha\gamma^s u$ (con r e s interi non negativi qualunque).

Analogamente, se δ è riflessivo in $C^*_{\alpha\beta}$, si avrà $\delta^{p+q}v = \delta^p\alpha\beta\delta^q v$ (con p e q interi non negativi qualunque).

Se, in particolare, γ è in $C^*_{\beta\alpha}$ simmetria di ordine $n = r + s$ (con r e s interi non negativi), per quanto sopra avremo $u = \gamma^r\beta\alpha\gamma^s u$. E se δ è simmetria di ordine $n = p + q$ (con p e q interi non negativi) in $C^*_{\alpha\beta}$, avremo $v = \delta^p\alpha\beta\delta^q v$.

Se i campi $C^*_{\beta\alpha}$ e C_β hanno una parte in comune e diciamo p il generico ente di questa, tenendo presente la $u = \beta\alpha u$, sarà $\beta p = \beta^2\alpha p$ e quindi: il corrispondente di p appartiene a C_{β^2}. Analogamente, se i campi $C^*_{\alpha\beta}$ e C_α hanno una parte in comune e diciamo q il generico ente di questa troveremo che il corrispondente di q appartiene a C_{α^2}. Inoltre, con n intero non negativo qualunque, avremo

$$\beta p = \beta^2(\alpha\beta)^n\alpha p = \beta(\beta\alpha)^{n+1}p \ , \qquad \alpha q = \alpha^2(\beta\alpha)^n\beta q = \alpha(\alpha\beta)^{n+1}q \ .$$

§ 5. - Supponiamo adesso che i due campi $C^*_{\beta\alpha}$ e $C^*_{\alpha\beta}$ abbiano una parte in comune il cui ente generico, che indicheremo con w, viene adesso a godere tutte le proprietà che precedentemente si sono viste valere per u, v, p, q e che qui richiamiamo in parte ponendo $w_1 = \alpha w$ e $w_2 = \beta w$. Avremo pertanto

$$w = \beta w_1 = \alpha w_2 = \beta \alpha \beta w_1 = \alpha \beta \alpha w_2 \ , \qquad w_1 = \alpha^2 w_2 = \alpha \beta w_1 = \alpha^2 \beta \alpha w_2 \ ,$$

$$w_2 = \beta^2 w_1 = \beta \alpha w_2 = \beta^2 \alpha \beta w_1 \ .$$

Sarà inoltre

$$w = \alpha \beta^2 w_2 = \beta \alpha^2 w_2 \ , \quad w_1 = \alpha^2 \beta^2 w_1 = \alpha \beta \alpha^2 w_2 \ , \quad w_2 = \beta^2 \alpha^2 w_1 = \beta \alpha \beta^2 w_1 \ .$$

Da queste ultime discende in particolare che

TEOREMA IX. – L'ente w_1 appartiene a $C^*_{\alpha^2\beta^2}$ e w_2 appartiene a $C^*_{\beta^2\alpha^2}$.

Dalle precedenti resulta pure che w e w_1 sono corrispondenti e così pure w_2 e w; inoltre w_1 e w_2, corrispondenti di un medesimo w, saranno detti *corrispondenti in* 2° *grado*.

§ 6. – Supponiamo adesso che i due campi $C^*_{\beta\alpha}$ e $C^*_{\alpha\beta}$ coincidano e diciamo ancora w il generico ente di un tal campo che, brevemente, diremo C^*. In tali ipotesi diremo che gli operatori α β sono *l'uno doppiamente inverso dell'altro* in C^*; se fosse ancora $C_\alpha \equiv C_\beta \equiv C^*$ diremo che *l'uno è doppiamente inverso ovunque dell'altro.*

Se $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{l-1}, \varepsilon_l$ sono simmetrie di ordine rispettivamente $n_1, n_2, \ldots, n_{l-1}, n_l$ in un campo C si ha che $\varepsilon_1^{r_1} \varepsilon_2^{r_2} \ldots \varepsilon_{l-1}^{r_{l-1}} \varepsilon_l^{r_l}$ è doppiamente inverso di $\varepsilon_l^{s_l} \varepsilon_{l-1}^{s_{l-1}} \ldots \varepsilon_2^{s_2} \varepsilon_1^{s_1}$ (con $r_1, r_2, \ldots, r_{l-1}, r_l, s_1, s_2, \ldots, s_{l-1}, s_l$ interi non negativi e tali che $r_1 + s_1 = n_1, r_2 + s_2 + n_2, \ldots, r_{l-1} + s_{l-1} = = n_{l-1}, r_l + s_l = n_l$) in C; giacchè, detto x il generico ente di C, si ha sempre

$$\varepsilon_1^{r_1} \varepsilon_2^{r_2} \ldots \varepsilon_{l-1}^{r_{l-1}} \varepsilon_l^{r_l} \varepsilon_l^{s_l} \varepsilon_{l-1}^{s_{l-1}} \ldots \varepsilon_2^{s_2} \varepsilon_1^{s_1} x = \varepsilon_l^{s_l} \varepsilon_{l-1}^{s_{l-1}} \ldots \varepsilon_2^{s_2} \varepsilon_1^{s_1} \varepsilon_1^{r_1} \varepsilon_2^{r_2} \ldots \varepsilon_{l-1}^{r_{l-1}} \varepsilon_l^{r_l} x = x \ .$$

Per $l = 1$, si ha in particolare che: se ε è una simmetria di ordine n in C, ε^r è doppiamente inverso di ε^s (con r e s interi non negativi tali che $r + s = n$).

TEOREMA X. – L'ente w appartiene $C^*_{\beta^2\alpha^2}$ e a $C^*_{\alpha^2\beta^2}$.

Infatti w_1 che per il teorema VIII appartiene a $C^*_{\alpha\beta}$, apparterrà pure a $C^*_{\beta\alpha}$, cioè sarà $\beta\alpha^2 w = \alpha w$ e, applicando β ad ambo i membri di questa segue senz'altro la prima parte dell'asserto; la seconda si proverà in guisa analoga.

TEOREMA XI. – L'ente w_1 appartiene anche a $C^*_{\beta^2\alpha^2}$ e w_2 appartiene anche a $C^*_{\alpha^2\beta^2}$.

La prima parte di questo teorema, che complessivamente viene ora ad essere un complemento del teorema IX, si prova senz'altro osservando che w_1, appartenendo a $C^*_{\alpha\beta}$, è identificabile con un w ed applicando il teorema X; in guisa analoga si proverà la seconda parte.

TEOREMA XII. – Gli operatori α e β sono riflessivi in C^*.

Ciò che segue senz'altro dalle $(\alpha\beta)\alpha w = \alpha w$ e $(\beta\alpha)\beta w = \beta w$.

Vale osservare che nel caso in cui gli operatori α e β sono l'uno doppiamente inverso ovunque dell'altro può vantaggiosamente porsi $\beta = \alpha^{-1}$ e $\alpha = \beta^{-1}$, potendosi così definire le potenze con esponente intero negativo $\alpha^{-r} = (\alpha^{-1})^r = \beta^r$ e $\beta^{-s} = (\beta^{-1})^s = \alpha^s$ (con r e s interi positivi qualunque).

TEOREMA XIII. – Se γ è un operatore riflessivo in C^* ed ivi commutabile con α, esso è altresì commutabile con β.

Infatti, per essere $\gamma w = \gamma\alpha\beta w$, si avrà per ipotesi $\gamma w = \alpha\gamma\beta w$ e, applicando β ad ambo i membri di questa, discenderà $\beta\gamma w = \beta\alpha\gamma\beta w = \gamma\beta w$ giacchè $\gamma\beta w$ appartiene pur esso a C^* e, con ciò, il teorema e dimostrato.

Sia adesso ε una simmetria primitiva di ordine n in C^*; ponendo $\gamma = \delta = \varepsilon$ e $u = v = w$ nelle $u = \gamma^r\beta\alpha\gamma^s u$ e $v = \delta^p\alpha\beta\delta^q v$ (con r, s, p, q, interi non negativi e tali che $r + s = p + q = n$) si ottiene $w = \varepsilon^r\beta\alpha\varepsilon^s w$ e $w = \varepsilon^p\alpha\beta\varepsilon^q w$, ma è pure $\alpha\varepsilon^s\varepsilon^s\beta w = w$ e $\beta\varepsilon^q\varepsilon^p\alpha w = w$; cosicchè dal confronto ordinato di queste due coppie di formule ricaveremo corrispondentemente due sistemi di $n - 1$ coppie in generale diverse di enti corrispondenti in 2° grado e di tipo

$$\begin{cases} w^*_{1,s} = \alpha\varepsilon^s w \\ w^*_{2,r} = \varepsilon^r\beta w \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} w^{**}_{1,p} = \varepsilon^p\alpha w \\ w^{**}_{2,q} = \beta\varepsilon^q w \end{cases}$$

con r, s, p, q, interi positivi e tali che $r+s=p+q=n$.

Se ε è commutabile con α in C^* i due sistemi di coppie ora considerati si riducono ad uno solo giacchè allora per $s=p$ si ha corrispondentemente $w^*_{1,s}=w^{**}_{1,s}$ e, per il teorema XIII, $w^*_{2,r}=w^{**}_{2,r}$.

Se ε non è primitiva si hanno riduzioni in entrambi i casi.

Teorema XIV. — Un ente di C^*, unito rispetto ad α lo è anche rispetto a β.

Infatti, per quanto detto al termine del § 2, è $\alpha\beta\overline{w}=\beta\overline{w}$; ma è pure $\alpha\beta\overline{w}=\overline{w}$ e quindi $\beta\overline{w}=\overline{w}$, c. v. d.